FUNCŢII COMPLEXE

note de curs pentru uzul studenţilor

Mircea Sularia

Bucureşti 2014

INTRODUCERE

Obiectivul acestei lucrări didactice este de a prezenta elemente de analiză complexă prevăzute de programa cursurilor de matematică ale Facultăţii de Inginerie Aerospaţială şi predate studenţilor din anul al II-lea.

Rezultatele matematice care se prezintă sunt necesare pentru subiectele "Serii Fourier" şi "Transformări integrale şi aplicaţii" din programa respectivă. Scopul urmărit este de a oferi studenţilor un ghid de studiu cât mai accesibil.

Sunt prezentate într-o formă succintă noţiuni şi rezultate introductive de bază ale *teoriei funcţiilor complexe de o variabilă complexă*: numere complexe şi planul complex, funcţii olomorfe, integrarea funcţiilor complexe. Asimilarea rezultatelor prezentate este indispensabilă pentru a înţelege alte teme de analiză complexă din programa analitică, importante pentru aplicaţii: dezvoltări în serie Laurent pentru studiul singularităţilor izolate ale funcţiilor complexe şi teorema reziduurilor cu aplicaţii la calculul unor integrale reale.

C U P R I N S

1 SISTEMUL NUMERELOR COMPLEXE ŞI PLANUL COMPLEX

Numerele complexe au apărut în legătură cu rezolvarea ecuaţiilor pătratice şi cubice cu necunoscuta în mulţimea numerelor reale $\mathbb{R}$. Dacă $a \in \mathbb{R}$ atunci există $x \in \mathbb{R}$ care este soluţie a ecuaţiei pătratice $x^2 = a$ dacă şi numai dacă $a \geq 0$. Pentru orice număr real nenegativ $a \geq 0$ există un număr real nenegativ unic $x \geq 0$ cu proprietatea $x^2 = a$, care se notează $x = \sqrt{a}$ şi se numeşte rădăcina pătrată a lui a. Rezultă că dacă $a \in \mathbb{R}$ şi $a \geq 0$ atunci mulţimea soluţiilor ecuaţiei $x^2 = a$ cu $x \in \mathbb{R}$ este $\{\sqrt{a}, -\sqrt{a}\}$. Faptul că ecuaţia pătratică $x^2 = a$ cu $a \in \mathbb{R}$ şi $a < 0$ nu are soluţii $x \in \mathbb{R}$ a condus la introducerea numerelor complexe. Studiul ecuaţiei cubice $x^3 = b$ cu necunoscuta $x \in \mathbb{R}$ şi $b \in \mathbb{R}$ fixat a condus de asemenea la introducerea numerelor complexe.

Mulţimea numerelor complexe se notează cu simbolul special $\mathbb{C}$ şi include mulţimea numerelor reale $\mathbb{R}$ în sensul următor: numerele complexe se pot aduna şi se pot înmulţi astfel încât operaţiile de adunare $+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ şi de înmulţire $\cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definesc pe mulţimea $\mathbb{C}$ o structură de corp comutativ $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ care are un subcorp $(\mathcal{R}, +, \cdot)$ izomorf cu corpul numerelor reale $(\mathbb{R}, +, \cdot)$. Prin urmare, numerele complexe aparţinând lui $\mathcal{R}$ se pot considera numere reale. Submulţimea $\mathcal{R}$ a lui $\mathbb{C}$ se numeşte dreapta reală. Există trei numere complexe speciale notate $\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$ şi i pe care le vom numi respectiv numărul complex zero, numărul complex unu şi unitatea imaginară astfel încât $\mathbf{0} \in \mathcal{R}$ este elementul neutru al operaţiei de adunare, $\mathbf{1} \in \mathcal{R} \setminus \{\mathbf{0}\}$ este elementul neutru al operaţiei de înmulţire şi $i \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{R}$ satisface identitatea $i^2 = -\mathbf{1}$. Mulţimea de numere complexe $\mathcal{I} = \{i \cdot y : y \in \mathcal{R}\}$ se numeşte dreapta imaginară a lui $\mathbb{C}$.

Conform celor menţionate anterior, rezultă că ecuaţia pătratică $z^2 = -\mathbf{1}$ cu necunoscuta $z \in \mathcal{R}$ nu are soluţii, dar aceeaşi ecuaţie cu necunoscuta $z \in \mathbb{C}$ are două soluţii $z = i \in \mathcal{I}$ şi $z = -i \in \mathcal{I}$.

Obiectivul acestui paragraf este de a prezenta noţiuni şi proprietăţi de bază privind corpul numerelor complexe şi planul complex. Punctul de pornire este reprezentarea geometrică a numerelor complexe prin vectori legaţi în origine şi de extremităţi puncte ale unui plan. Pe această bază, se defineşte structura de corp a mulţimii $\mathbb{C}$ împreună cu interpretarea geometrică a operaţiilor de adunare şi de înmulţire. Planul complex este definit printr-o structură de spaţiu vectorial real normat pe mulţimea $\mathbb{C}$ cu norma derivată dintr-un produs scalar reflectând reprezentarea geometrică a numerelor complexe. Noţiuni şi proprietăţi algebrice şi geometrice de bază sunt prezentate.

1.1 Mulţimea numerelor complexe. Dreapta reală şi dreapta imaginară

Prezentare intuitivă. *Un număr complex este definit printr-o pereche de numere reale x şi y care este reprezentată sub forma $x + iy$* sau *$x + yi$, unde i este un simbol al unui număr complex numit unitatea imaginară. Mulţimea numerelor complexe se notează prin $\mathbb{C}$. Se scrie prescurtat simbolul x pentru $x + i0$, de unde rezultă că mulţimea numerelor reale $\mathbb{R}$ poate fi considerată o submulţime a lui $\mathbb{C}$. De asemenea, se mai utilizează prescurtările iy pentru $0+iy$, 0 pentru $0+i0$ şi i pentru $0+i1$. Numerele complexe $x+iy$ şi $u+iv$ sunt egale dacă şi numai dacă $x = u$ şi $y = v$. Acest fapt permite introducerea părţii reale $\operatorname{Re} z$ şi a părţii imaginare $\operatorname{Im} z$ ale numărului complex $z = x+iy$ respectiv prin x şi y. Utilizând noţiuni de geometrie analitică se introduc dreapta reală prin mulţimea punctelor $z \in \mathbb{C}$ cu $\operatorname{Im} z = 0$ şi dreapta imaginară prin mulţimea punctelor $z \in \mathbb{C}$ cu $\operatorname{Re} z = 0$.*

Prezentare formalizată. *Se consideră dat un sistem de numere reale $\mathbb{R}$. Mulţimea numerelor complexe $\mathbb{C}$ este definită prin mulţimea punctelor planului real $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathcal{P}_2$. Spaţiul vectorial real $\mathcal{P}_2$ împreună cu norma euclidiană* se numeşte *planul complex. Se introduc elemente de bază privind definiţia planului complex. Se descriu spaţiul euclidian aritmetic real ${}_{\mathbb{R}}V_2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$* şi *spaţiul afin $(\mathcal{P}_2, \delta)$ utilizate în geometria analitică. Dreapta reală $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{C}$ şi dreapta imaginară $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{C}$ sunt definite de axele de coordonate în planul real. Aceste elemente sunt necesare în paragrafele următoare pentru a arăta că formalizarea conceptului de număr complex în cadrul unui sistem de numere reale reflectă prezentarea intuitivă precedentă.*

Definiţii 1. Fie $\mathbb{R}$ mulţimea numerelor reale.

(i) *Mulţimea numerelor complexe* notată $\mathbb{C}$ este mulţimea tuturor perechilor ordonate de numere reale, deci

$$\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

(ii) *Partea reală* $\operatorname{Re} z$ şi *partea imaginară* $\operatorname{Im} z$ ale unui număr complex $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ sunt numere reale definite prin

$$\operatorname{Re} z = x \text{ şi } \operatorname{Im} z = y.$$

Consecinţa 2. Are loc următoarea regulă de *egalitate în* $\mathbb{C}$, pentru orice numere complexe $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ şi $w = (u, v) \in \mathbb{C}$:

$$z = w \Leftrightarrow x = u \text{ şi } y = v \Leftrightarrow \operatorname{Re} z = \operatorname{Re} w \text{ şi } \operatorname{Im} z = \operatorname{Im} w.$$

Notaţii 3. **a**) *Corpul numerelor reale* este definit de mulţimea suport $\mathbb{R}$ a unui sistem de numere reale împreună cu operaţiile de *adunare* $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi de *înmulţire* $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Numerele reale *zero* şi *unu* se notează respectiv prin 0 şi 1. *Suma*, *diferenţa* şi *produsul* perechii ordonate $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ se notează respectiv prin $x + y$, $x - y$ şi xy reprezentând numerele reale $+(x, y)$, $+(x, -y)$ şi $\cdot(x, y)$, unde $-y \in \mathbb{R}$ este opusul lui $y \in \mathbb{R}$. Prin $\leq$ notăm *relaţia de ordine* pe $\mathbb{R}$ din cadrul sistemului de numere reale. Intervalul compact de origine $a \in \mathbb{R}$ şi de extremitate $b \in \mathbb{R}$ se notează prin $[a, b]$, deci

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} \subseteq \mathbb{R}.$$

O listă a notaţiilor pe care le utilizăm în continuare este următoarea:

Simbol de mulţime	Definiţie	Denumire elemente
$\mathbb{R}$	Sistem de numere reale $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq, 0, 1)$	Numere reale
$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	Numere reale nenule
$\mathbb{R}_+$	$\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$	Numere reale nenegative
$\mathbb{R}_-$	$\{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$	Numere reale nepozitive
$\mathbb{R}_+^*$	$\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$	Numere reale pozitive
$\mathbb{R}_-^*$	$\{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$	Numere reale negative
$\mathbb{N}$	$\{1, 2, ..., n, ...\}$	Numere naturale
$\mathbb{Z}$	$(-\mathbb{N}) \cup \{0\} \cup \mathbb{N}$	Numere întregi
$\mathbb{Q}$	$\left\{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z} \text{ şi } n \in \mathbb{N}\right\}$	Numere raţionale
$\mathbb{C}$	$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$	Numere complexe

Notaţii 3.b) Notăm $\mathcal{V}_2[\mathbb{R}] = ({}_{\mathbb{R}}V_2, \mathcal{P}_2, \delta)$, unde ${}_{\mathbb{R}}V_2$ este *spaţiul euclidian aritmetic real de dimensiune* 2 şi $(\mathcal{P}_2, \delta)$ este *spaţiul afin standard* corespunzător spaţiului vectorial ${}_{\mathbb{R}}V_2$. Sistemul $\mathcal{V}_2[\mathbb{R}]$ este strict necesar în *geometria analitică* şi are următoarele componente specifice:

1. *mulţimea vectorilor* $V_2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{C}$;
2. *adunarea vectorilor* $+ : V_2 \times V_2 \to V_2$ definită prin condiţia următoare, pentru orice pereche de vectori $(a, b) \in V_2 \times V_2$:
   dacă $a = (a_1, a_2)$ şi $b = (b_1, b_2)$ atunci $a + b = (a_1 + b_1, a_2 + b_2) \in V_2$;

3. *vectorul nul* $\mathbf{0} = (0,0) \in V_2$ care este elementul neutru al operaţiei de adunare $+$ pe V_2;

4. *corpul scalarilor* $\mathbb{R}$;

5. *înmulţirea cu scalari a vectorilor* $\cdot : \mathbb{R} \times V_2 \to V_2$ definită prin condiţia următoare, pentru orice $(\lambda, a) \in \mathbb{R} \times V_2$:
   dacă $a = (a_1, a_2)$ atunci $\lambda \cdot a = (\lambda a_1, \lambda a_2) \in V_2$;

6. *produsul scalar euclidian* $\langle \cdot, \cdot \rangle_2 : V_2 \times V_2 \to \mathbb{R}$ definit astfel:
   dacă $a, b \in V_2$ cu $a = (a_1, a_2)$ şi $b = (b_1, b_2)$ atunci
   $\langle a, b \rangle_2 = a_1 b_1 + a_2 b_2$;

7. *norma euclidiană* $\|\cdot\|_2 : V_2 \to \mathbb{R}_+$ definită de produsul scalar euclidian, deci pentru orice vector $a \in V_2$:
   dacă $a = (a_1, a_2)$ atunci $\|a\|_2 = \sqrt{\langle a, a \rangle_2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$;

8. *mulţimea punctelor* $\mathcal{P}_2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{C}$ reprezentând *planul real*;

9. *corespondenţa dintre perechi de puncte şi vectori* $\delta : \mathcal{P}_2 \times \mathcal{P}_2 \to V_2$ definită prin relaţia următoare, pentru orice $(A, B) \in \mathcal{P}_2 \times \mathcal{P}_2$:
   $\delta(A, B) = B - A \in V_2$,
   unde în membrul drept al egalităţii anterioare punctele $A, B \in \mathcal{P}_2$ sunt considerate vectori aritmetici reali din $V_2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathcal{P}_2$ şi $- : V_2 \times V_2 \to V_2$ este operaţia de scădere în grupul $(V_2, +)$, prin urmare:
   dacă $-A \in V_2$ este opusul lui $A \in V_2$ atunci $B - A = B + (-A)$.

Notaţii 3. **c**) *Segmentul orientat de origine* $A \in \mathcal{P}_2$ *şi de extremitate* $B \in \mathcal{P}_2$ se notează prin $[A, B]$ şi este definit analitic în spaţiul vectorial ${}_{\mathbb{R}}V_2 = {}_{\mathbb{R}}\mathcal{P}_2$ astfel:

$$[A, B] = \{(1 - \lambda) \cdot A + \lambda \cdot B : \lambda \in [0, 1]\}.$$

Notaţii 3. **d**) Fie $O = (0,0) = \mathbf{0} \in V_2 = \mathcal{P}_2$. Dacă $(A, B) \in \mathcal{P}_2 \times \mathcal{P}_2$ atunci *vectorul* $\delta(A, B) \in V_2$ se notează $\overrightarrow{AB}$, deci pentru orice punct $P \in \mathcal{P}_2$:

$$\overrightarrow{OP} = \delta(O, P) = P - O = P \text{ şi } \overrightarrow{AB} = \delta(A, B) = B - A = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}.$$

Notaţii 3. **e**). Fie $(A, B) \in \mathcal{P}_2 \times \mathcal{P}_2$ cu $A \neq B$. *Dreapta* determinată de perechea de puncte distincte (A, B) şi *semidreapta de origine A care trece prin B* se notează respectiv prin AB şi AB_+. *Semidreapta de origine A care nu trece prin B şi este conţinută în AB* se notează prin AB_-. Au loc relaţiile:

$$AB = \{(1 - \lambda) \cdot A + \lambda \cdot B : \lambda \in \mathbb{R}\};$$
$$AB_+ = \{(1 - \lambda) \cdot A + \lambda \cdot B : \lambda \in \mathbb{R}_+\} \subseteq AB;$$
$$AB_- = \{(1 - \lambda) \cdot A + \lambda \cdot B : \lambda \in \mathbb{R}_-\} \subseteq AB.$$

Observaţie 4. Fie $e_1 = (1, 0)$ şi $e_2 = (0, 1)$. Atunci $e = (e_1, e_2) \in V_2 \times V_2$ este o *bază ortonormală ordonată a spaţiului euclidian aritmetic real* ${}_{\mathbb{R}}V_2$ din [1.1 Not. 3 *b*)] numită *baza canonică.*

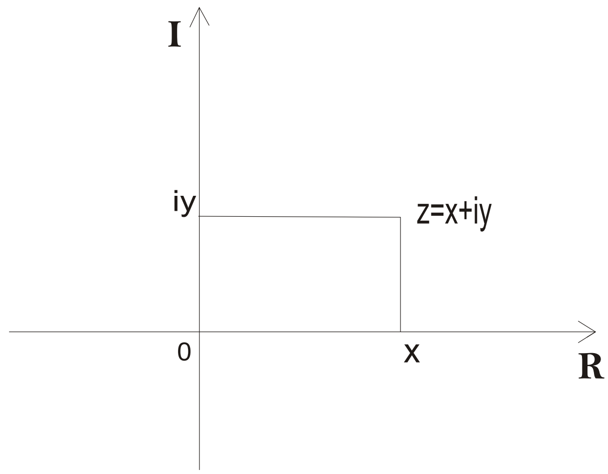

Figure 1: Reprezentarea carteziană a numerelor complexe în plan

Definiţii 5. (i) *Planul complex* este spaţiul vectorial real normat

$$({}_{\mathbb{R}}\mathcal{P}_2, \|\cdot\|_2) = ({}_{\mathbb{R}}\mathbb{C}, \|\cdot\|_2) = ({}_{\mathbb{R}}V_2, \|\cdot\|_2),$$

unde $\|\cdot\|_2$ este norma euclidiană a planului real [1.1 Not. 3 b) 1.-8.].

(ii) *Dreapta reală* $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{C} = \mathcal{P}_2$ este dreapta OU_1 din $\mathcal{P}_2$ determinată de punctele $O = (0,0)$ şi $U_1 = (1,0)$ reprezentând *axa absciselor* în $\mathcal{P}_2$, deci

$$\mathcal{R} = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}.$$

(iii) *Dreapta imaginară* $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{C} = \mathcal{P}_2$ este dreapta OU_2 din $\mathcal{P}_2$ determinată de punctele $O = (0,0)$ şi $U_2 = (0,1)$ reprezentând *axa ordonatelor* în $\mathcal{P}_2$, deci

$$\mathcal{I} = \{(0,y) : y \in \mathbb{R}\}.$$

Consecinţe 6. Fie $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{C}$ şi $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{C}$ definite anterior [1.1 Def. 5 (ii) şi (iii)].

(i) Dreapta reală este mulţimea numerelor complexe a căror parte imaginară este egală cu zero:

$$\mathcal{R} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = 0\}.$$

(ii) Dreapta imaginară este mulţimea numerelor complexe a căror parte reală este egală cu zero:

$$\mathcal{I} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = 0\}.$$

Definiţii 7. Fie $e = (e_1, e_2)$ baza canonică a spaţiului ${}_{\mathbb{R}}V_2$.

(i) *Numărul complex zero* este punctul $\mathbf{0} = (0,0) = O \in \mathcal{R} \cap \mathcal{I} \subseteq \mathbb{C}$ numit şi *origine* sau *elementul nul* reprezentând vectorul nul $\overrightarrow{OO} = O \in V_2 = \mathcal{P}_2$.

(ii) *Numărul complex unu* pe care-l numim *unitatea reală a lui* $\mathbb{C}$ este punctul $\mathbf{1} = (1,0) = U_1 \in \mathcal{R} \setminus \mathcal{I} \subseteq \mathbb{C}$ reprezentând versorul $e_1 = \overrightarrow{OU_1} = U_1 \in V_2 = \mathcal{P}_2$.

(iii) *Unitatea imaginară a lui* $\mathbb{C}$ este punctul $i = (0,1) = U_2 \in \mathcal{I} \setminus \mathcal{R} \subseteq \mathbb{C}$ reprezentând versorul $e_2 = \overrightarrow{OU_2} = U_2 \in V_2 = \mathcal{P}_2$.

1.2 Reprezentarea geometrică în plan a numerelor complexe

Considerăm spaţiul geometric tridimensional. Un plan cartezian este un plan împreună cu un reper ortonormal orientat. Descriem o metodă de reprezentare a numerelor complexe într-un plan cartezian.

Metoda de reprezentare respectivă se bazează pe faptul că există o izometrie de la planul complex cu distanţa aritmetică euclidiană pe orice plan cartezian considerat ca spaţiu metric cu distanţa geometrică euclidiană.

Planul complex numit şi plan Gauss sau diagrama Argand furnizează sensul intuitiv al numerelor complexe şi studiul structurii acestuia a reprezentat resursa principală de dezvoltare a analizei complexe.

Definiţii 1.Fie $\mathcal{H}_3$ *spaţiul geometric tridimensional,* π un *plan* şi O un *punct.*

(i) Un *vector legat în* O este un *segment orientat* $a = [O, A]$ de origine O şi de extremitate un punct oarecare A din spaţiul $\mathcal{H}_3$.

(ii) Dacă $O \in \pi$ atunci un *vector legat în* O *relativ la* π este un segment orientat $a = [O, A]$ de origine O şi de extremitate un punct $A \in \pi$.

(iii) Un *reper ortogonal în planul* π *de origine* O este un triplet de puncte $R_\pi(O) = (X, O, Y)$ cu proprietăţile următoare:

1. X, O şi Y sunt puncte două câte două distincte în π;
2. Dreptele $OX \subseteq \pi$ şi $OY \subseteq \pi$ determinate respectiv de perechile de puncte (O, X) şi (O, Y) sunt perpendiculare.

Notaţii 2. În condiţiile din [1.2.1 Def. 1]:

$a)$ notăm $R_\pi(O) = (XOY)$, dacă $R_\pi(O) = (X, O, Y)$ este un reper ortogonal în planul π de origine O;

$b)$ dacă $O \in \pi$ atunci notăm prin $V_\pi(O)$ mulţimea tuturor vectorilor legaţi în O relativ la π, deci $V_\pi(O) = \{[O, A] : A \in \pi\}$;

$c)$ dacă $a = [O, A]$ este un vector legat în O atunci notăm prin $\|a\|$ lungimea segmentului a definită în $\mathcal{H}_3$.[1].

Observaţie 3. Dacă $R_\pi(O) = (XOY)$ atunci dreptele corespunzătoare OX şi OY sunt concurente în punctul O, conţinute în planul π şi perpendiculare, fapte ce se exprimă în $\mathcal{H}_3$ prin relaţiile următoare:

1. $OX \cap OY = \{O\}$;
2. $OX \cup OY \subseteq \pi$;
3. $OX \perp OY$.

Definiţia 4. Un *reper ortonormal orientat* în planul π de origine O este un sistem $\overrightarrow{R_\pi}(O) = (R_\pi(O), u_1, u_2)$ satisfăcând condiţiile următoare:

[1] În fizică o forţă se reprezintă printr-un segment orientat $s = [P, Q]$ cu $P \neq Q$, unde P este punctul său de aplicaţie, dreapta d determinată de punctele P şi Q reprezintă direcţia acesteia, iar punctul $Q \in d$ defineşte sensul său de acţiune şi mărimea acesteia egală cu $\|s\|$.

1. există $X, Y \in \pi$ astfel încât $R_\pi(O) = (XOY)$ este un reper ortogonal în π de origine O definit conform [1.2.1 Def. 1 (*iii*)];

2. există $U_1, U_2 \in \pi$ astfel încât $u_1 = [O, U_1] \subseteq OX, u_2 = [O, U_2] \subseteq OY$ şi $\|u_1\| = \|u_2\| = 1$;

3. dreptele OX şi OY sunt axe cu originea O, de segmente unitate egale cu versorii u_1 şi u_2 având semiaxele pozitive

$OX_+ = [O, \infty_{OX}) \subseteq OX$ şi $OY_+ = [O, \infty_{OY}) \subseteq OY$ astfel încât

$U_1, X \in OX_+$ şi $U_2, Y \in OY_+$.

Consecinţe 5. Fie $\overrightarrow{R_\pi}(O) = (R_\pi(O), u_1, u_2)$ un reper ortonormal orientat în planul π de origine O. Sunt satisfăcute următoarele condiţii:

(*i*) u_1 şi u_2 sunt versori ortogonali astfel încât $u_1 \subseteq OX_+$ şi $u_2 \subseteq OY_+$;

(*ii*) mulţimea vectorilor legaţi $V_\pi(O)$ are o structură de spaţiu vectorial real normat $({}_{\mathbb{R}}V_\pi(O), N_e)$ în care adunarea $+ : V_\pi(O) \times V_\pi(O) \to V_\pi(O)$ şi înmulţirea cu scalari numere reale $\cdot : \mathbb{R} \times V_\pi(O) \to V_\pi(O)$ a vectorilor din $V_\pi(O)$ sunt definite în calculul vectorial[2] şi norma pe $V_\pi(O)$ este o funcţie $N_e : V_\pi(O) \to \mathbb{R}_+$ definită astfel pentru orice $a \in V_\pi(O)$: $N_e(a) = \|a\|$.

(*iii*) perechea de versori $u = (u_1, u_2)$ este o bază a spaţiului vectorial real normat $({}_{\mathbb{R}}V_\pi(O), N_e)$.

Definiţii 6. Un *plan cartezian* este un plan π în spaţiul $\mathcal{H}_3$ împreună cu un reper ortonormal orientat în π cu originea O notat $\overrightarrow{R_\pi}(O) = (R_\pi(O), u_1, u_2)$ astfel încât să fie satisfăcute condiţiile din [1.2.1 Def. 4].

Propoziţia 7. Fie π un plan cartezian având un reper ortonormal orientat în π cu originea O definit anterior prin $\overrightarrow{R_\pi}(O) = (R_\pi(O), u_1, u_2)$. Sunt îndeplinite condiţiile următoare:

(*i*) Mulţimea numerelor complexe $\mathbb{C}$ este în corespondenţă biunivocă cu mulţimea vectorilor $V_\pi(O)$ prin funcţia $\rho_V : \mathbb{C} \to V_\pi(O)$ definită pentru orice $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ prin $\rho_V(z) = x \cdot u_1 + y \cdot u_2 \in V_\pi(O)$, unde $+$ şi $\cdot$ sunt operaţiile din spaţiul vectorial normat ${}_{\mathbb{R}}V_\pi(O)$ specificate în [1.2.1 Cons. 5 (*ii*)].

(*ii*) Mulţimea vectorilor legaţi $V_\pi(O)$ este în corespondenţă biunivocă cu mulţimea punctelor planului π prin funcţia $\rho_\pi : V_\pi(O) \to \pi$ definită pentru orice $a = [O, A] \in V_\pi(O)$ prin $\rho_\pi(a) = A \in \pi$.

(*iii*) Mulţimea numerelor complexe $\mathbb{C}$ este în corespondenţă biunivocă cu mulţimea punctelor planului π prin funcţia $\rho_\pi \circ \rho_V : \mathbb{C} \to \pi$.

---

[2] Operaţiile $+$ şi $\cdot$ reprezintă operaţiile obişnuite din fizică de adunare şi de înmulţire cu scalari numere reale a forţelor având acelaşi punct de aplicaţie O reprezentate prin vectori legaţi din $V_\pi(O)$: pentru orice $[O, A], [O, B] \in V_\pi(O)$, $[O, A] + [O, B] = [O, C] \in V_\pi(O)$ astfel încât $O, A, B, C \in \pi$ şi punctul C este simetricul lui O faţă de mijlocul segmentului $[A, B]$ (*regula paralelogramului de adunare a forţelor*), pentru orice $a = [O, A] \in V_\pi(O)$ şi $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \cdot a = [O, A_\lambda] = a_\lambda \in V_\pi(O)$, astfel încât punctele O, A, A_λ sunt coliniare şi verifică relaţia $\|a_\lambda\| = |\lambda| \cdot \|a\|$ (*regula de înmulţire cu scalari numere reale a forţelor*).

Comentarii.

1. Rezultatul din [1.2.2 Prop. 7 (i)] *exprimă faptul că numerele complexe se pot reprezenta geometric prin vectori legaţi într-un punct fixat* O şi de extremităţi puncte ale unui *plan cartezian* π.

2. Rezultatul din [1.2.2 Prop. 7 (iii)] *exprimă faptul că numerele complexe se pot reprezenta geometric prin puncte ale unui plan cartezian* π care sunt extremităţi ale vectorilor legaţi în O.

Propoziţia 8. Fie $A \in \mathcal{P}_2$ şi $\delta : \mathcal{P}_2 \times \mathcal{P}_2 \to V_2$ funcţia definită conform [1.1 Not. 3 b) 9.]. Definim o funcţie $\delta_A : \mathcal{P}_2 \to V_2$ astfel încât pentru orice $B \in \mathcal{P}_2$, $\delta_A(B) = \overrightarrow{AB} = \delta(A, B)$. Atunci δ_A este bijectivă.

Definiţii 9. Fie $\mathcal{X}$ mulţimea punctelor lui $\mathcal{H}_3$.

(i) Distanţa geometrică euclidiană pe $\mathcal{X}$ este o funcţie $d : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}_+$ definită prin condiţia următoare, pentru orice puncte $P, Q \in \mathcal{X}$: dacă $s = [P, Q]$ atunci $d(P, Q) = \|s\|$.

(ii) Distanţa geometrică euclidiană $d_\pi : \pi \times \pi \to \mathbb{R}_+$ pe mulţimea punctelor unui plan π din $\mathcal{H}_3$ este restricţia la $\pi \times \pi \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ a funcţiei distanţă geometrică euclidiană d definită anterior.

(iii) Distanţa aritmetică euclidiană pe mulţimea punctelor planului complex $\mathbb{C} = \mathcal{P}_2 = V_2$ este funcţia distanţă $d_2 : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}_+$ definită de norma euclidiană $\|\cdot\|_2$ [1.1 Def.5 (i)], deci au loc relaţiile următoare, pentru orice numere complexe $z = (x, y) \in \mathbb{C}, w = (u, v) \in \mathbb{C}$:

$$d_2(z, w) = \|z - w\|_2 = \sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2}.$$

Rezultatul următor prezintă proprietăţile de bază ale funcţiilor bijective ρ_V şi ρ_π prin care se realizează reprezentarea geometrică a numerelor complexe într-un plan cartezian π.

Propoziţia 10. Fie π un plan cartezian definit în [1.2.2 Def. 6]. Funcţiile bijective ρ_V şi ρ_π din [1.2.2 Prop.7 $(i), (ii)$] au proprietăţile următoare:

(i) ρ_V este un izomorfism de spaţii vectoriale reale de la planul complex $\mathbb{C} = \mathcal{P}_2$ pe $V_\pi(O)$;

(ii) $\rho_\pi \circ \rho_V$ este o izometrie de la spaţiul metric $(\mathbb{C}, d_2)$ pe spaţiul metric (π, d_π), unde d_π şi d_2 sunt funcţiile distanţă geometrică şi aritmetică introduse anterior în [1.2.2 Def. 9 $(ii), (iii)$].

1.3 Operaţii cu numere complexe şi reprezentare carteziană

Rezumatul temei. *Mulţimea numerelor complexe* $\mathbb{C}$ *are o structură de corp comutativ. Se introduce reprezentarea carteziană a numerelor complexe. Sunt stabilite apoi regulile de calcul cu numere complexe în forma carteziană.*

Definiţii 1. (i) Corpul $(\mathbb{R},+,\cdot,0,1)$ asociat unui sistem de numere reale $(\mathbb{R},+,\cdot,\leq,0,1)$ se numeşte *corpul real* $\mathbb{R}$ [1.1 Not. 3 a)].

(ii) *Corpul numerelor complexe* este definit de mulţimea numerelor complexe $\mathbb{C}$ împreună cu operaţiile de *adunare* $+:\mathbb{C}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ şi de *înmulţire* $\cdot:\mathbb{C}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ astfel încât pentru orice $z=(x,y)\in\mathbb{C}$, $w=(u,v)\in\mathbb{C}$:

$z+w=(x+u,y+v)$ şi $z\cdot w=(xu-yv,xv+yu)$.

Numerele complexe zero $\mathbf{0}=(0,0)\in\mathbb{C}$ şi unu $\mathbf{1}=(1,0)\in\mathbb{C}$ sunt elementele neutre respectiv ale operaţiilor $+$ şi $\cdot$ satisfăcând pentru orice $z\in\mathbb{C}$,

$z+\mathbf{0}=z=\mathbf{0}+z$ şi $z\cdot\mathbf{1}=z=\mathbf{1}\cdot z$.

Corpul $(\mathbb{C},+,\cdot,\mathbf{0},\mathbf{1})$ se numeşte *corpul complex* $\mathbb{C}$.

Observaţii 2. Următoarele proprietăţi sunt în conexiune cu *interpretarea geometrică a operaţiei de adunare* în planul complex

$({}_{\mathbb{R}}\mathcal{P}_2,\|\cdot\|_2)=({}_{\mathbb{R}}\mathbb{C},\|\cdot\|_2)=({}_{\mathbb{R}}V_2,\|\cdot\|_2)$ [1.1 Def. 5. (i)].

1. Operaţia de adunare a numerelor complexe $+:\mathbb{C}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ coincide cu operaţia de adunare a vectorilor aritmetici reali [1.1 Not. 3. b) 2.].

2. Pentru orice $(z,w)\in\mathbb{C}\times\mathbb{C}$, suma $s=z+w\in\mathbb{C}$ este un punct al planului complex astfel încât vectorul său de poziţie $\overrightarrow{\mathbf{0}s}$ are extremitatea s definită de unicul punct cu proprietatea că mijlocul segmentului orientat

$[\mathbf{0},s]=\{\lambda s:\lambda\in[0,1]\}$

coincide cu mijlocul segmentului orientat

$[z,w]=\{(1-\lambda)\,z+\lambda w:\lambda\in[0,1]\}$,

adică $\frac{1}{2}s=\frac{1}{2}z+\frac{1}{2}w$.[3].

În următoarea propoziţie se prezintă consecinţe ale faptului că orice punct al planului complex $z=(x,y)\in\mathbb{C}$ este suma dintre proiecţiile sale $p_r(z)=(x,0)$ şi $p_i(z)=(0,y)$ respectiv pe dreapta reală $\mathcal{R}$ şi pe dreapta imaginară $\mathcal{I}$.

Propoziţia 3. Fie $z=(x,y)\in\mathbb{C}$, $\boldsymbol{x}=(x,0)\in\mathcal{R}$ şi $\boldsymbol{y}=(y,0)\in\mathcal{R}$. Au loc relaţiile următoare:

(i) $(0,y)=i\cdot\boldsymbol{y}\in\mathcal{I}$;

(ii) $z=(x,0)+(0,y)=\boldsymbol{x}+i\cdot\boldsymbol{y}$;

(iii) pentru orice $\boldsymbol{u}=(u,0)\in\mathcal{R}$ şi $\boldsymbol{v}=(v,0)\in\mathcal{R}$,

$\boldsymbol{x}+i\cdot\boldsymbol{y}=\boldsymbol{u}+i\cdot\boldsymbol{v}\Leftrightarrow\boldsymbol{x}=\boldsymbol{u}$ şi $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{v}$.

Propunem rezolvarea exerciţiilor următoare prin care se explicitează un set de proprietăţi privind structura algebrică a planului complex şi se evidenţiază relaţii specifice dintre corpul complex $\mathbb{C}$ şi corpul real $\mathbb{R}$. Aceste proprietăţi sunt consecinţe directe ale definiţiilor operaţiilor algebrice de adunare şi de înmulţire

[3] Această identitate simplă exprimă algebric interpretarea geometrică într-un plan cartezian π din $\mathcal{H}_3$ a sumei $z+w$ utilizând funcţiile bijective $\rho_V:\mathbb{C}\to V_\pi(O)$ şi $\rho_\pi:V_\pi(O)\to\pi$ din [1.2 Prop. 10]. Fie $r_\pi=\rho_\pi\circ\rho_V:\mathbb{C}\to\pi$. Considerăm punctele din π corespunzătoare prin funcţia bijectivă r_π numerelor complexe z,w şi $z+w$: $r_\pi(z)=P_z\in\pi$, $r_\pi(w)=P_w\in\pi$ şi $r_\pi(z+w)=P_{z+w}\in\pi$. Atunci are loc relaţia geometrică $\overrightarrow{OP_{z+w}}=\overrightarrow{OP_z}+\overrightarrow{OP_w}$ exprimată algebric prin identitatea respectivă.

a numerelor complexe din [1.3 Def. 1. (ii)]. Rezultatul esenţial este menţionat în [Ex. 4.6] exprimând faptul că mulţimea numerelor complexe $\mathbb{C}$ este o extensie a mulţimii numerelor reale $\mathbb{R}$ astfel încât corpul real $\mathbb{R}$ se identifică cu dreapta reală $\mathcal{R}$ care este un subcorp al corpului complex $\mathbb{C}$. Dreapta imaginară $\mathcal{I}$ nu este un subcorp al corpului complex $\mathbb{C}$, dar admite o structură de corp izomorf cu corpul real $\mathbb{R}$ [Ex. 4.8, 4.9].

Exerciţiu 4.1. Fie $a, b, c \in \mathbb{C}$. Să se verifice următoarele reguli de calcul:

(1) $a + b = b + a$ şi $a \cdot b = b \cdot a$
(*comutativitatea adunării şi înmulţirii*),

(2) $a + (b + c) = (a + b) + c$ şi $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
(*asociativitatea adunării şi înmulţirii*),

(3) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
(*distributivitatea înmulţirii faţă de adunare*) sau (*regula factorului comun*).

Consecinţă. Pentru orice şir finit de numere complexe

$$z_1, z_2, ..., z_n \ (n \in \mathbb{N} \text{ cu } n \geq 2)$$

definim inductiv un număr complex

$s_n = z_1 + z_2 + ... + z_n = \sum_{k=1}^{n} z_k$ prin relaţiile $s_2 = z_1 + z_2 = \sum_{k=1}^{2} z_k$ şi

$s_{j+1} = s_j + z_{j+1} = \sum_{k=1}^{j} z_k + z_{j+1}$, pentru $j = 2, 3, ..., n-1$ dacă $n \geq 3$.

Pentru orice permutare $\pi \in S_n$ a mulţimii $\{1, 2, ..., n\}$ are loc relaţia:

$$\sum_{k=1}^{n} z_k = \sum_{k=1}^{n} z_{\pi(k)}.$$

Exerciţiu 4.2. Pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ cu $\beta \neq 0$, notăm prin $\frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{R}$ câtul perechii (α, β) în corpul real $\mathbb{R}$. Fie $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Să se verifice următoarele proprietăţi:

(4) există un număr complex unic $-a \in \mathbb{C}$ care satisface condiţia $a + (-a) = \mathbf{0}$ şi este definit prin relaţia $-a = (-a_1, -a_2)$, deci operaţia de scădere $-$ în corpul complex este definită astfel, pentru orice $b = (b_1, b_2) \in \mathbb{C}$:

$b - a = b + (-a) = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$.

(5) dacă $a \neq \mathbf{0}$ atunci $a_1^2 + a_2^2 \neq 0$ şi există un număr complex unic $a^{-1} \in \mathbb{C}$ care satisface condiţia $a \cdot a^{-1} = \mathbf{1}$ şi are expresia

$a^{-1} = \left(\frac{a_1}{a_1^2+a_2^2}, -\frac{a_2}{a_1^2+a_2^2}\right)$.

Exerciţiu 4.3. Fie $a, b \in \mathbb{C}$. Să se verifice următoarele proprietăţi în $\mathbb{C}$:

(6) dacă $a \neq \mathbf{0}$ atunci există un număr complex unic $z \in \mathbb{C}$ notat $z = \frac{b}{a}$ şi numit câtul perechii (b, a) care satisface relaţia $a \cdot z = b$ şi are expresia $z = a^{-1} \cdot b$, unde $a^{-1} \in \mathbb{C}$ este definit anterior conform [1.3 Ex. 4.2. (5)];

(7) dacă $a = (a_1, a_2) \neq (0, 0) = \mathbf{0}$ şi $b = (b_1, b_2)$ atunci

$a^{-1} = \frac{\mathbf{1}}{a}$,

$\frac{b}{a} = \frac{\mathbf{1}}{a} \cdot b = \left(\frac{a_1}{a_1^2+a_2^2}, -\frac{a_2}{a_1^2+a_2^2}\right) \cdot (b_1, b_2) = \left(\frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{a_1^2+a_2^2}, \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_1^2+a_2^2}\right)$.

Exerciţiu 4.4. Să se verifice următoarele proprietăţi ale dreptei reale $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{C}$ şi ale dreptei imaginare $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{C}$:

(i) $\mathcal{R} = \{\boldsymbol{x} + i \cdot \mathbf{0} : \boldsymbol{x} \in \mathcal{R}\}$;

(ii) $\mathcal{I} = \{\mathbf{0} + i \cdot \boldsymbol{y} : \boldsymbol{y} \in \mathcal{R}\}$;

(iii) există două funcţii bijective $\sigma_r : \mathbb{R} \to \mathcal{R}$ şi $\sigma_i : \mathbb{R} \to \mathcal{I}$ definite astfel, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\sigma_r(x) = (x, 0) \in \mathcal{R} \text{ şi } \sigma_i(y) = (0, y) \in \mathcal{I}.$$

Exerciţiu 4.5. Există două funcţii surjective $p_r : \mathbb{C} \to \mathcal{R}$ şi $p_i : \mathbb{C} \to \mathcal{I}$ pe care le numim proiecţii canonice ale punctelor din planul complex $\mathbb{C}$ respectiv pe dreapta reală $\mathcal{R}$ şi pe dreapta imaginară $\mathcal{I}$, satisfăcând următoarele condiţii:

$$u \in \mathcal{R} \text{ implică } p_r(u) = u,$$
$$v \in \mathcal{I} \text{ implică } p_i(v) = v,$$

şi definite pentru orice număr complex $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ prin relaţiile:

$$p_r(z) = (x, 0) \in \mathcal{R} \text{ şi } p_i(z) = (0, y) \in \mathcal{I}.$$

Exerciţiu 4.6. (i) Dacă $x, y \in \mathbb{R}$ atunci au loc relaţiile:

$$(x, 0) + (y, 0) = (x + y, 0),$$
$$(x, 0) \cdot (y, 0) = (xy, 0).$$

(ii) Dreapta reală $\mathcal{R}$ este un subcorp al corpului complex $\mathbb{C}$.

(iii) Funcţia bijectivă $\sigma_r : \mathbb{R} \to \mathcal{R}$ din [1.3 Ex. 4.4 (iii)] este un izomorfism de corpuri de la $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$ pe $(\mathcal{R}, +, \cdot, \mathbf{0}, \mathbf{1})$.

Concluzie. Să notăm prin $\mathcal{R} \hookrightarrow \mathbb{C}$ proprietatea (ii) şi prin $\mathbb{R} \sim \mathcal{R}$ faptul că există un izomorfism de corpuri de la $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$ pe $(\mathcal{R}, +, \cdot, \mathbf{0}, \mathbf{1})$. Conform proprietăţii (iii) rezultă că $\mathbb{R} \sim \mathcal{R} \hookrightarrow \mathbb{C}$.

Exerciţiu 4.7. (i) Pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$, definim $(x, 0) \preceq (y, 0) \Leftrightarrow x \leq y$. Atunci $(\mathcal{R}, \preceq)$ este o mulţime total ordonată astfel încât izomorfismul de corpuri $\sigma_r : \mathbb{R} \to \mathcal{R}$ din [1.3 Ex. 4.6 (iii)] satisface condiţia: $x \leq y \Leftrightarrow \sigma_r(x) \preceq \sigma_r(y)$.

(ii) Dreapta reală $\mathcal{R}$ este mulţimea suport a unui sistem de numere reale $(\mathcal{R}, +, \cdot, \preceq, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ izomorf cu $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq, 0, 1)$, fapt pe care-l notăm prin $\mathcal{R} \equiv \mathbb{R}$ şi care exprimă matematic enunţul:

"$\mathcal{R} = \mathbb{R}$, abstracţie făcând de un izomorfism".

Exerciţiu 4.8. (i) $\mathbf{0} \in \mathcal{I}$ şi $\mathcal{I}$ este un subgrup al grupului $(\mathbb{C}, +, \mathbf{0})$;

(ii) $i \in \mathcal{I}$ şi $i \cdot i = -\mathbf{1} \in \mathcal{R} \setminus \mathcal{I}$;

(iii) dreapta imaginară $\mathcal{I}$ nu este un subcorp al lui $\mathbb{C}$.

Exerciţiu 4.9. Fie $\ast : \mathcal{I} \times \mathcal{I} \to \mathcal{I}$ o operaţie binară pe dreapta imaginară definită astfel, pentru orice $\boldsymbol{y} = (0, y) \in \mathcal{I}$ şi $\boldsymbol{y}' = (0, y') \in \mathcal{I}$:

$$\boldsymbol{y} \ast \boldsymbol{y}' = (0, y) \ast (0, y') = (0, yy').$$

Să se verifice următoarele proprietăţi:

(i) Sistemul $\mathcal{I}^* = (\mathcal{I}, +, \ast, \mathbf{0}, i)$ este un corp comutativ astfel încât unitatea imaginară i a lui $\mathbb{C}$ este elementul neutru al operaţiei $\ast$.

(ii) Funcţia bijectivă $\sigma_i : \mathbb{R} \to \mathcal{I}$ din [1.3 Ex. 4.4 (iii)] este un izomorfism de corpuri de la corpul real $\mathbb{R}$ pe $\mathcal{I}^*$.

(iii) Dreapta imaginară are o structură de corp comutativ $\mathcal{I}^* = (\mathcal{I}, +, \ast, \mathbf{0}, i)$ izomorf cu subcorpul $(\mathcal{R}, +, \cdot, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ al corpului complex $\mathbb{C}$, deci $\mathcal{I}^* \sim \mathcal{R} \hookrightarrow \mathbb{C}$.

Comentarii. 1. În continuarea acestui paragraf, prezentăm *reprezentarea carteziană* sau *forma algebrică* a numerelor complexe împreună cu *regulile de calcul simbolic în* $\mathbb{C}$ derivate din [1.3 Prop. 3, Ex. 4.6 şi Ex. 4.7 (ii)].

2. Regulile de calcul simbolic sunt justificate şi importante în aplicaţii. Aceste reguli stabilesc relaţia dintre corpul complex $\mathbb{C}$ şi corpul real $\mathbb{R}$. Obţinerea lor s-a bazat esenţial pe sensul geometric intuitiv al numerelor complexe.

3. Elementele intuitive sunt necesare pentru înţelegerea teoriei numerelor complexe. De asemenea, pentru a înţelege teoria matematică respectivă sunt necesare cunoştinţe specifice de algebră liniară, geometrie analitică şi analiză reală. În acest sens, în cuprinsul acestui capitol sunt prezentate atât elemente intuitive cât şi anumite rezultate teoretice fundamentale privind studiul corpului complex şi a planului complex. Sunt propuse spre rezolvare diverse exerciţii bazate pe noţiunile introduse anterior.

Pe baza proprietăţilor dreptei reale $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{C}$ prezentate în [1.3 Ex. 4.6], relativ la corpul complex $\mathbb{C}$ se introduc următoarele notaţii pe care le vom utiliza în continuare, fără a mai menţiona de fiecare dată explicit acest fapt.

Notaţii 5. *a*) Numărul complex $\boldsymbol{x} = (x, 0) \in \mathcal{R}$ se notează prin x. Deci, numărul complex zero $\mathbf{0} = (0, 0) \in \mathcal{R}$ şi unitatea reală $\mathbf{1} = (1, 0) \in \mathcal{R}$ se notează respectiv prin simbolurile 0 şi 1 ale numerelor reale zero şi unu.

b) Pentru orice numere complexe $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, produsul perechii (z_1, z_2) în corpul complex $(\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1)$ se notează prin z_1z_2, deci

$$z_1z_2 = z_1 \cdot z_2.$$

Exemple de utilizare a notaţiilor precedente.

(e1) pentru orice $\lambda \in \mathbb{R}$ şi $z = (x, y) \in \mathbb{C}$,

$$\lambda z = (\lambda, 0)z = (\lambda, 0) \cdot z = (\lambda, 0) \cdot (x, y) = (\lambda x, \lambda y) \in \mathbb{C};$$

(e2) definim pentru orice $z \in \mathbb{C}$, $z^0 = 1, z^1 = z$ şi pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $z^{n+1} = z^n \cdot z$, deci conform [1.3 Not. 5. *b*)] rezultă

$$z^2 = zz, z^3 = z^2z, ..., z^{n+1} = z^nz.$$

Exerciţiu 6.1. Pentru orice $n \in \mathbb{N}$ şi $z, w \in \mathbb{C}$,

$$(z + w)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k z^{n-k} w^k,$$

unde

$$C_n^0 = C_n^n = 1 \text{ şi}$$
$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \ (1 \le k \le n - 1).$$

Exerciţiu 6.2. Pentru orice $n \in \mathbb{N}$ şi $z, w \in \mathbb{C}$,

$$z^n - w^n = (z - w) \sum_{k=0}^{n-1} z^k w^{n-1-k}.$$

Definiţia 7. Fie $z = (x, y) \in \mathbb{C}$. Conform [1.3 Not. 5.], relaţiile prezentate în [1.3 Prop. 3 (*ii*)] se exprimă prin identitatea $z = x + iy$, pe care o numim *reprezentarea carteziană* sau *reprezentarea algebrică* a numărului complex z.

Observaţii 8. Fie $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ şi $w = (u, v) \in \mathbb{C}$ numere complexe având reprezentările algebrice $z = x + iy$ şi $w = u + iv$. Din [1.3 Not. 5.] rezultă:

(*i*) $\operatorname{Re} z = \operatorname{Re}(x + iy) = x$ şi $\operatorname{Im} z = \operatorname{Im}(x + iy) = y$;

(*ii*) $z = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z$;

(iii) $z = w \Leftrightarrow x + iy = u + iv \Leftrightarrow x = u$ şi $y = v$.
Relaţiile anterioare exprimă proprietatea că forma algebrică $x + iy$ a numărului complex z este unic determinată de numerele reale $x = \operatorname{Re} z \in \mathbb{R}$ şi $y = \operatorname{Im} z \in \mathbb{R}$.

Exerciţiu 9.1. Să se demonstreze următoarele reguli de calcul cu puteri ale unităţii imaginare:
(1) $i^0 = 1, i^1 = i, i^2 = -1$ şi pentru orice $n \in \mathbb{N}$,
$i^{4n-4} = 1,$
$i^{4n-1} = -i,$
$i^{4n-2} = -1,$
$i^{4n-3} = i;$
(2) $i^{-1} = \frac{1}{i} = -i$ şi pentru orice $m \in \mathbb{N}$,
$i^{-m} = \left(i^{-1}\right)^m = \left(\frac{1}{i}\right)^m = (-i)^m = (-1)^m i^m;$
(3) pentru orice numere întregi $p, q \in \mathbb{Z}$,
$i^p i^q = i^{p+q},$
$(i^p)^q = i^{pq}.$

Exerciţiu 9.2. Să se demonstreze următoarele reguli de adunare $z + w$, scădere $z - w$, înmulţire zw şi împărţire $\frac{z}{w}$ $(w \neq 0)$ în $\mathbb{C}$, pentru orice pereche de numere complexe $(z, w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ reprezentate în forma algebrică prin relaţiile $z = x + iy$ şi $w = u + iv$:
(4) $z + w = (x + iy) + (u + iv) = (x + u) + i(y + v),$
(5) $z - w = (x + iy) - (u + iv) = (x - u) + i(y - v),$
(6) $zw = (x + iy)(u + iv) = (xu - yv) + i(xv + yu),$
(7) dacă $w \neq 0$ atunci $\frac{z}{w} = \frac{x+iy}{u+iv} = \frac{(x+iy)(u-iv)}{(u+iv)(u-iv)} = \frac{xu+yv}{u^2+v^2} + i\frac{yu-xv}{u^2+v^2}.$
Identităţile $(4) - (6)$ rezultă din [1.3 Def. 1. (ii) şi Def. 7.]. Proprietatea (7) se obţine utilizând [1.3 Ex. 4.3].

Observaţii 10. Relativ la calculul algebric în $\mathbb{C}$ menţionăm:

1. în corpul complex $\mathbb{C}$ sunt valide regulile de calcul algebric într-un corp comutativ împreună cu proprietăţile specifice derivate din [1.3 Def. 1.] cum sunt cele prezentate în [1.3 Ex. 4.1-4.3];

2. conform reprezentării algebrice a numerelor complexe prezentate în [1.3 Def. 7.], corpul complex $\mathbb{C}$ se poate identifica cu un corp comutativ având ca suport mulţimea formelor algebrice
$\mathbb{R}[i] = \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}\}$
împreună cu operaţiile de adunare şi de înmulţire definite conform regulilor din [1.3 Ex. 9.2 $(4), (6)$]. Regulile de scădere şi de împărţire în $\mathbb{R}[i]$ sunt cele prezentate în [1.3 Ex. 9.2 $(5), (7)$].

3. regulile de calcul cu numere complexe în forma algebrică din $\mathbb{R}[i]$ se pot deduce prin calcul simbolic aplicând succesiv regulile cunoscute de calcul într-un corp comutativ împreună cu regula specifică $i^2 = -1$.

Exemplu 10.1. Să deducem prin calcul simbolic regula de adunare în $\mathbb{C}$ a numerelor complexe în forma algebrică. Pornind de la termenul $z + w$ din [1.3 Ex. 9.2 (4)] şi utilizând regulile de calcul menţionate anterior rezultă următorul şir de relaţii:
$z + w =$
$(x + iy) + (u + iv) =$
$((x + iy) + u) + iv =$
$((iy + x) + u) + iv =$
$(iy + (x + u)) + iv =$
$((x + u) + iy) + iv =$
$(x + u) + (iy + iv) = (x + u) + i(y + v)$.
Obţinem identitatea [1.3 Ex. 9.2 (4)]. Justificaţi calculele efectuate.

Exemplu 10.2. Să deducem prin calcul simbolic regula de înmulţire din [1.3 Ex. 9.2 (6)]. Rezultă următorul şir de relaţii:
$zw =$
$(x + iy)\,(u + iv) =$
$(x + iy)\,u + (x + iy)\,(iv) =$
$(xu + (iy)\,u) + (x\,(iv) + (iy)\,(iv)) =$
$(xu + (iy)\,u) + ((iy)\,(iv) + x\,(iv)) =$
$(xu + (iy)\,(iv)) + ((iy)\,u + x\,(iv)) =$
$(xu - yv) + i\,(xv + yu)$.
Obţinem identitatea [1.3 Ex. 9.2 (6)]. Justificaţi calculele efectuate.

Exerciţiu 11. Să se deducă regulile din [1.3 Ex. 9.2 (5) , (7)] de scădere şi de împărţire în $\mathbb{C}$ a numerelor complexe în forma algebrică pornind din membrul stâng al identităţilor respective şi aplicând succesiv regulile de calcul simbolic.

Concluzii 12 (calculul simbolic al reprezentării algebrice pentru termeni în $\mathbb{C}$**).** Fie p un termen relativ la structura algebrică $\left(\mathbb{C}, +, \cdot, -, \div, 0, 1\right)$ definită de mulţimea numerelor complexe $\mathbb{C}$ împreună cu operaţiile de adunare $+$, înmulţire $\cdot$, scădere $-$, împărţire $\div$ şi constantele $0, 1 \in \mathbb{C}$. Acest termen reprezintă un număr complex $p \in \mathbb{C}$, deci există o reprezentare algebrică unică a lui p definită prin relaţia următoare:

$$p = \operatorname{Re} p + i \operatorname{Im} p.$$

Pentru obţinerea reprezentării algebrice a lui p este necesar şi suficient să fie cunoscute reprezentările algebrice ale fiecărui număr complex care apare în p. Prin substituirea fiecărui număr complex care apare în p prin forma sa algebrică se obţine un nou termen relativ la structura algebrică extinsă $\left(\mathbb{R}[i], +, \cdot, -, \div, 0, 1\right)$ pe care-l notăm $p_{\mathbb{R}}[i]$. Orice simbol care apare în $p_{\mathbb{R}}[i]$ este fie un simbol de număr real $x \in \mathbb{R}$, fie simbolul i, fie un simbol al uneia dintre operaţiile de adunare $+$, înmulţire $\cdot$, scădere $-$ şi împărţire $\div$. Evaluând acest termen $p_{\mathbb{R}}[i]$ cu regulile de calcul simbolic într-un corp comutativ şi regula de calcul specifică în corpul complex $i^2 = -1$ se determină reprezentarea carteziană a acestuia de forma următoare:

$$p_{\mathbb{R}}[i] = u + iv,$$

unde $u, v \in \mathbb{R}$, dar $p_{\mathbb{R}}[i] = p \in \mathbb{C}$, deci $u = \operatorname{Re} p$ şi $v = \operatorname{Im} p$.

Exemplu. Fie termenul $p = \left(z^2 + z - 2\right) \cdot \left(\frac{w+1}{z}\right)^2$. Să determinăm forma algebrică a lui p pentru $z = 2 + i$ şi $w = -1 + i$. Rezultă egalităţile următoare:

$p = p_{\mathbb{R}}[i] = \left((2+i)^2 + (2+i) - 2\right) \cdot \left(\frac{(-1+i)+1}{2+i}\right) =$

$((3+4i) + i) \frac{i}{2+i} =$

$(3+5i) \frac{i(2-i)}{(2+i)(2-i)} =$

$(3+5i) \frac{1+2i}{5} =$

$\frac{(3+5i)(1+2i)}{5} =$

$\frac{-7+11i}{5} =$

$-\frac{7}{5} + i\frac{11}{5}$.

Exerciţiu. Fie $p = \left(z^2 + z - 2\right) \cdot \left(\frac{w+1}{z}\right)^2$. Să se determine forma algebrică a termenului p pentru $z = x + iy$ cu $z \neq 0$ şi $w = z - 3$. În cazul particular $z = 2 + i$, să se verifice rezultatul obţinut în exemplul anterior.

1.4 Conjugare şi modul. Argument şi reprezentare polară

Fie $({}_{\mathbb{R}}\mathbb{C}, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$ *spaţiul euclidian real cu mulţimea vectorilor* $\mathbb{C}$, $({}_{\mathbb{R}}\mathbb{C}, \|\cdot\|_2)$ *planul complex* şi $d_2 : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}_+$ *distanţa aritmetică euclidiană în planul complex* [1.1 Def. 5. (i) şi 1.2 Def. 9. (iii)].

Definiţia 1. Dacă $z = x + iy \in \mathbb{C}$ atunci *conjugatul complex* al lui z este un număr complex $\overline{z} \in \mathbb{C}$ definit prin relaţia $\overline{z} = x - iy$. Operaţia de *conjugare complexă* este funcţia $\bar{\cdot} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ astfel încât pentru orice $z \in \mathbb{C}$, $\bar{\cdot}(z) = \overline{z}$.

Observaţii 2. Conjugatul complex $\overline{z} = x - iy \in \mathbb{C}$ al lui $z = x + iy \in \mathbb{C}$ este un punct în planul complex care reprezintă simetricul punctului z faţă de dreapta reală $\mathcal{R}$. Suma şi produsul perechii $(z, \overline{z}) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ sunt puncte pe dreapta reală $\mathcal{R}$ definite prin:

(1) $z + \overline{z} = (x + iy) + (x - iy) = 2x$,

(2) $z\overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 + y^2$,

iar diferenţa dintre z şi $\overline{z}$ este un punct pe dreapta imaginară $\mathcal{I}$ definit prin:

(3) $z - \overline{z} = (x + iy) - (x - iy) = 2iy$.

Din relaţiile $x = \operatorname{Re} z$ şi $y = \operatorname{Im} z$ rezultă formulele:

$$\operatorname{Re} z = \frac{z+\overline{z}}{2} \text{ şi } \operatorname{Im} z = \frac{z-\overline{z}}{2i}.$$

Definiţia 3. *Modulul* unui număr complex z este un număr real nenegativ $|z| \in \mathbb{R}_+$ definit prin distanţa dintre punctul z şi origine 0 reprezentând norma euclidiană a vectorului z, deci $|z| = d_2(z, 0) = \|z\|_2$.

Consecinţe 4. Dacă $z = x + iy$ atunci

(i) $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$,

(ii) $z\overline{z} = |z|^2$.

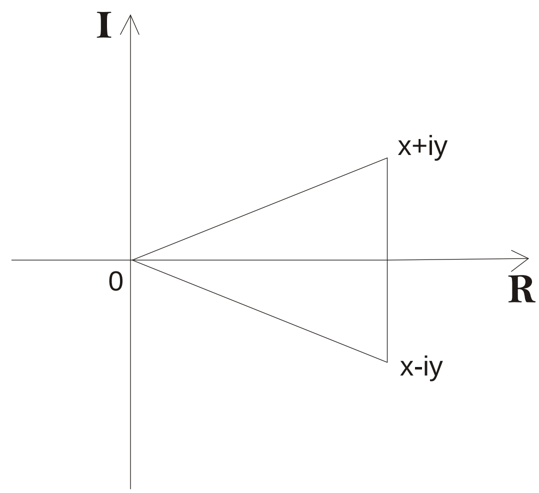

Figure 2: Operaţia de conjugare ($\mathbb{C} \ni z = x + iy \longmapsto \overline{z} = x - iy \in \mathbb{C}$)

Definiţia 5. *Spaţiul euclidian complex cu mulţimea vectorilor* $\mathbb{C}$ este definit de perechea $({}_{\mathbb{C}}\mathbb{C}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{C}})$, unde:

1) ${}_{\mathbb{C}}\mathbb{C}$ este spaţiul vectorial complex cu grupul abelian al vectorilor egal cu $(\mathbb{C}, +, 0)$ şi înmulţirea vectorilor cu scalari din $\mathbb{C}$ definită prin înmulţirea numerelor complexe $\cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$;

2) $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ este un produs scalar complex definit prin relaţia următoare, pentru orice $z, w \in \mathbb{C}$: $\langle z, w\rangle_{\mathbb{C}} = z\overline{w}$.

Definiţia 6. *Funcţia normă asociată produsului scalar complex* $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{C}}$ este funcţia $\|\cdot\|_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}_+$ definită astfel, pentru orice $z \in \mathbb{C}$:

$$\|z\|_{\mathbb{C}} = \sqrt{\langle z, z\rangle_{\mathbb{C}}}.$$

Consecinţă 7. Pentru orice $z \in \mathbb{C}$, $|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \|z\|_{\mathbb{C}}$.

În următoarele exerciţii se prezintă proprietăţi de bază ale modulului şi ale operaţiei de conjugare reprezentând formule de calcul în $\mathbb{C}$ şi inegalităţi specifice derivate din definiţiile precedente.

Exerciţiu 8.1. Pentru orice $z \in \mathbb{C}$,

$$|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z = 0.$$

Exerciţiu 8.2. Să se verifice identităţile următoare, pentru orice $z, w \in \mathbb{C}$:

1) $\overline{\overline{z}} = z$,

2) $\overline{(z + w)} = \overline{z} + \overline{w}$ şi $\overline{(z - w)} = \overline{z} - \overline{w}$,

3) $\overline{(zw)} = \overline{z}\,\overline{w}$,

4) $\frac{z}{w} = \frac{z\overline{w}}{w\overline{w}} = \frac{z}{|w|^2}$, dacă $w \neq 0$,

5) $\overline{\left(\frac{1}{w}\right)} = \frac{1}{\overline{w}}$ şi $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$, dacă $w \neq 0$,

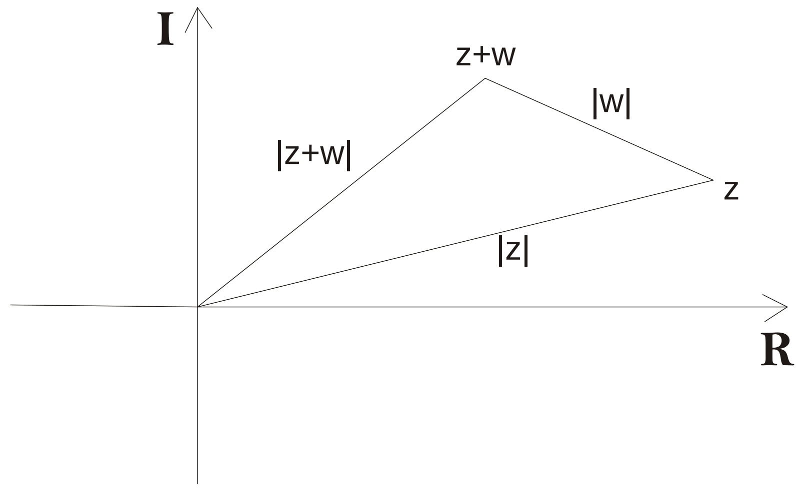

Figure 3: Inegalitatea triunghiului în $\mathbb{C}$.

6) $|z| = |\overline{z}|$,
7) $|zw| = |z|\,|w|$.

Exerciţiu 8.3. Pentru orice $z, w \in \mathbb{C}$,
1) $\operatorname{Im} z = 0 \Leftrightarrow \overline{z} = z \Leftrightarrow z \in \mathcal{R}$,
2) $\operatorname{Re} z = 0 \Leftrightarrow \overline{z} = -z \Leftrightarrow z \in \mathcal{I}$,
3) $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$,
4) $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$,
5) $|z + w| \leq |z| + |w|$ (**inegalitatea triunghiului**),
6) $|z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$,
7) $||z| - |w|| \leq |z + w|$.

Definiţii 9. Fie $z = x + iy \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.
(i) Un *argument* al lui z (*unghi în coordonate polare*) este un număr real $\theta \in \mathbb{R}$ care satisface relaţia următoare numită o *reprezentare polară* a lui z:
1) $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$,
unde $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
(ii) Pentru orice $\theta \in \mathbb{R}$, notăm prin $e^{i\theta}$ numărul complex definit prin
2) $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

Propoziţia 10. Fie $z = x + iy \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ şi $Arg\,(z)$ mulţimea tuturor argumentelor lui z, deci conform definiţiei precedente [1.4 Def.9. (i)1) şi (ii)2)] rezultă egalitatea următoare:

$$Arg\,(z) = \left\{\theta : \theta \in \mathbb{R} \text{ şi } z = |z|\, e^{i\theta}\right\}.$$

Sunt îndeplinite condiţiile următoare:
(i) $\theta \in Arg\,(z)$ dacă şi numai dacă $\theta \in \mathbb{R}$ şi

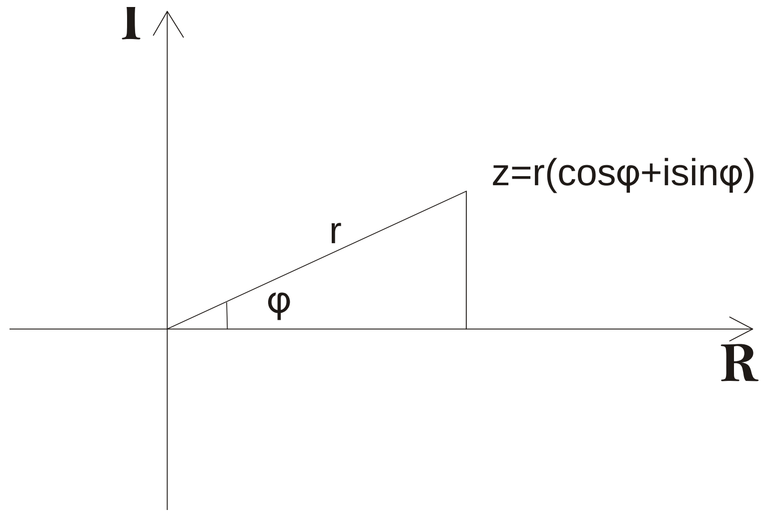

Figure 4: Reprezentare polară în $\mathbb{C}$

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{x}{|z|} \\ \sin\theta = \frac{y}{|z|} \end{cases};$$

(ii) $Arg\,(z)$ este o mulţime nevidă cu proprietatea că pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$, există un număr real unic $\varphi \in (\alpha, \alpha + 2\pi] \subseteq \mathbb{R}$ astfel încât $\varphi \in Arg\,(z)$, deci

$$\begin{cases} \cos\varphi = \frac{x}{|z|} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin\varphi = \frac{y}{|z|} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}.$$

Definiţia 11. *Valoarea principală a argumentului lui z* este un argument al lui z notat prin $\arg z \in Arg\,(z)$ şi definit prin numărul real unic $\varphi \in (-\pi, \pi]$ din [1.4 Prop. 10. (ii)] corespunzător valorii $\alpha = -\pi$.

Consecinţe 12. Fie $z = x + iy \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(i) Valoarea principală a argumentului lui z este un număr real $\arg z$ cu proprietatea $-\pi < \arg z \leq \pi$ şi care se calculează cu relaţia următoare:

$$\arg z = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{dacă} \quad x = 0 \quad \text{şi} \quad y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{dacă} \quad x = 0 \quad \text{şi} \quad y < 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{dacă} \quad x > 0 \\ \pi + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{dacă} \quad x < 0 \quad \text{şi} \quad y \geq 0 \\ -\pi + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{dacă} \quad x < 0 \quad \text{şi} \quad y < 0 \end{cases}.$$

(ii) $Arg\,(z) = \{\theta : \theta \in \mathbb{R} \text{ şi } (\exists k \in \mathbb{Z})\ \theta = \arg z + 2k\pi\}$.

(iii) $\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w) \pmod{2\pi}$,

$\arg\left(\frac{z}{w}\right) = \arg(z) - \arg(w) \pmod{2\pi}$.

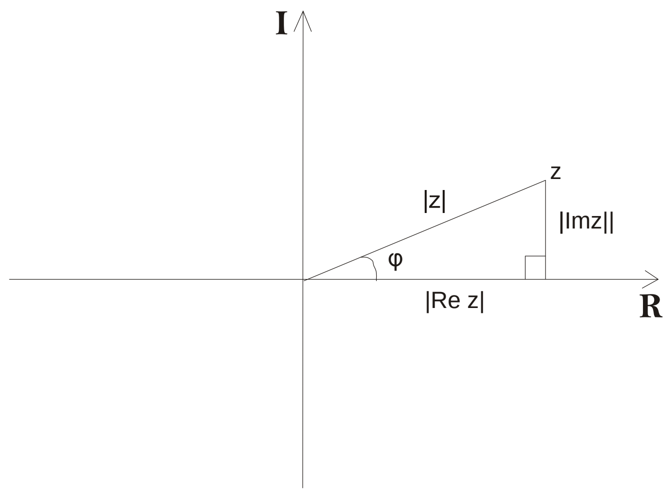

Figure 5: Reprezentare polară în $\mathbb{C}$

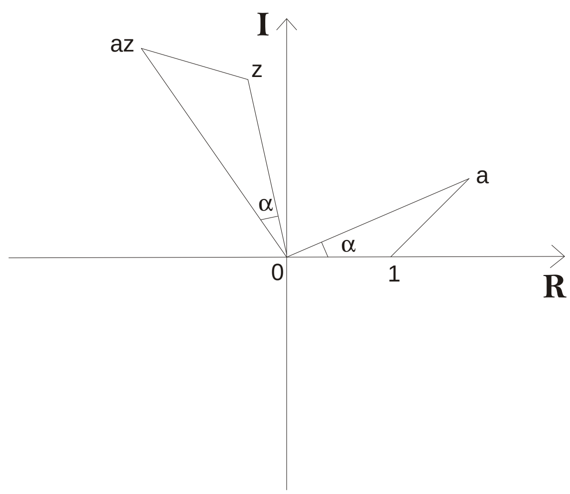

Figure 6: Produsul az $(a, z \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\})$.

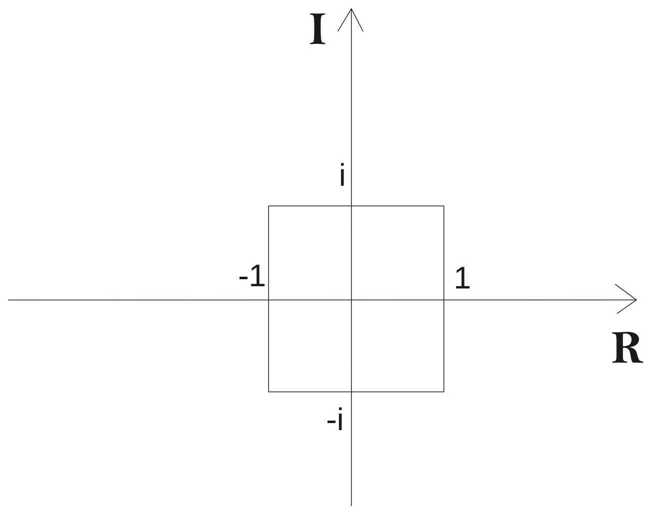

Figure 7: Mulţimea de puncte {-i,-1,1,i}

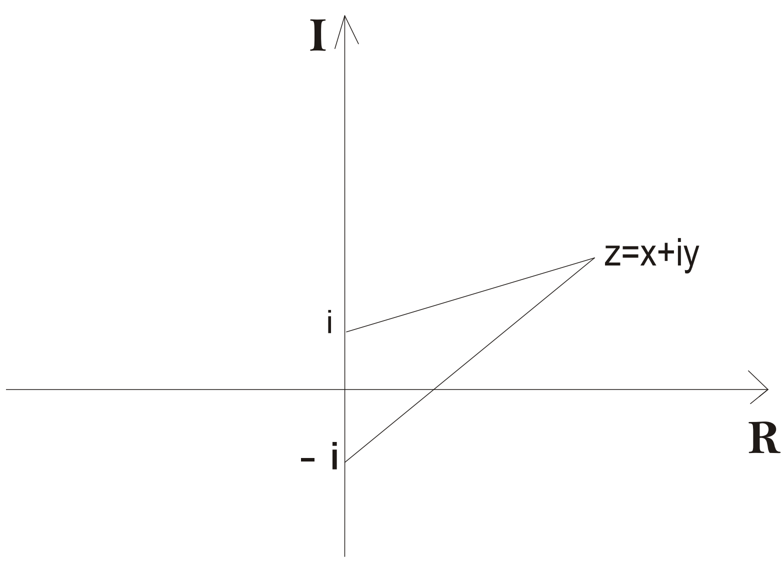

Figure 8: Triunghiul cu vârfurile z, i şi $-i$

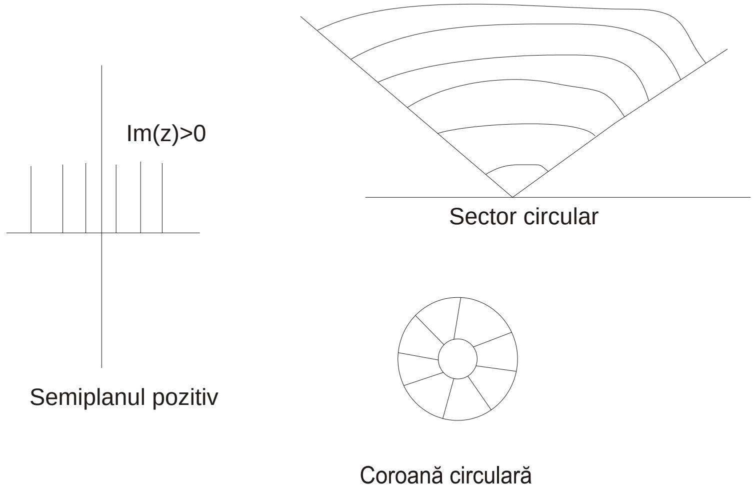

Figure 9: Sectoare în $\mathbb{C}$

1.5 Mulţimi speciale de puncte în planul complex

Definiţii 1. Fie $a \in \mathbb{C}$ şi $r \geq 0$ un număr real nenegativ.

(i) *Discul deschis cu centrul în* $a \in \mathbb{C}$ *şi de rază* r este

$$D_r(a) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}.$$

(ii) *Discul închis cu centrul în* $z_0 \in \mathbb{C}$ *şi de rază* r este

$$\overline{D_r}(a) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| \leq r\}.$$

(iii) O *vecinătate* a punctului a este o mulţime de numere complexe $V \subseteq \mathbb{C}$ cu proprietatea că există $r > 0$ astfel încât $D_r(a) \subseteq V$. *Mulţimea tuturor vecinătăţilor lui* a se notează prin $\mathcal{V}(a)$, deci

$$\mathcal{V}(a) = \{V \subseteq \mathbb{C} : V \text{ este o vecinătate a punctului } a\}.$$

(iv) *Semiplanul superior deschis în* $\mathbb{C}$ este

$$\Pi^+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}.$$

Semiplanul superior închis în $\mathbb{C}$ este

$$\overline{\Pi^+} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \geq 0\}.$$

Analog se definesc *semiplanul inferior deschis în* $\mathbb{C}$,

$$\Pi^- = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z < 0\}$$

şi *semiplanul inferior închis în* $\mathbb{C}$ este

$$\overline{\Pi^-} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \leq 0\}.$$

(v) Un *sector* în $\mathbb{C}$ este o mulţime de puncte de forma următoare:

$$S_{\alpha,\beta} = \left\{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : z = |z|\, e^{i\varphi} \text{ cu } \alpha < \varphi < \beta\right\} \ (\alpha < \beta).$$

Dacă $\beta - \alpha = \frac{\pi}{2}$ atunci $S_{\alpha,\beta}$ este un unghi. Dacă $\beta - \alpha = \pi$ atunci $S_{\alpha,\beta} = \Pi^+$ este un semiplan superior deschis.

Definiţii 2. Pentru orice $A \subseteq \mathbb{C}$ definim următoarele mulţimi:

(i) *mulţimea punctelor interioare* lui A,

$$int(A) = \{z \in A : (\exists r > 0) D_r(z) \subseteq A\},$$

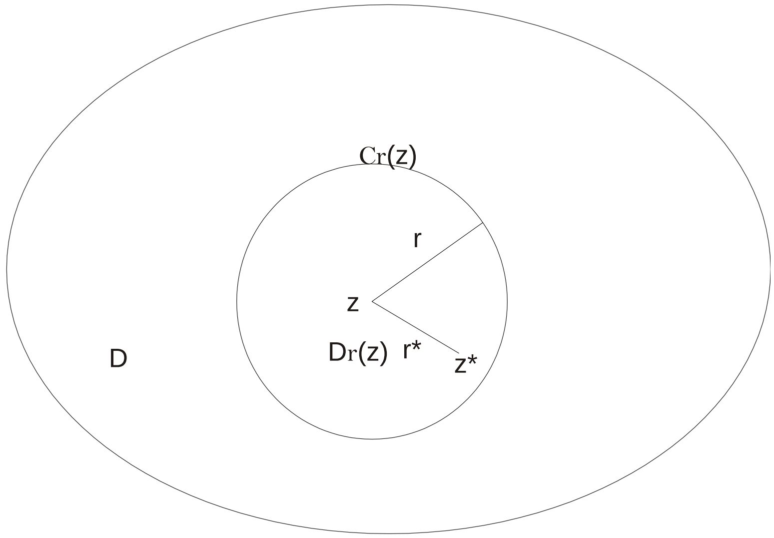

Figure 10: Ilustrarea condiţiei $D_r(z) \subseteq D$ pentru o mulţime deschisă $D \subseteq \mathbb{C}$

(ii) *mulţimea punctelor aderente* lui A,

$adh(A) = \{z \in \mathbb{C} : (\forall r > 0) D_r(z) \cap A \neq \emptyset\}$,

(iii) *mulţimea complement* a lui A, $A^c = \mathbb{C} \setminus A = \{z \in \mathbb{C} : z \notin A\}$,

(iv) *mulţimea frontieră* a lui A, $fr(A) = adh(A) \cap adh(A^c)$,

(v) *mulţimea punctelor exterioare* lui $A, ext(A) = int(A^c)$,

(vi) *mulţimea punctelor de acumulare* ale lui A,

$A' = \{z \in \mathbb{C} : z \in adh(A \setminus \{z\})\}$,

(vii) *mulţimea vecinătăţilor lui* A,

$\mathcal{V}(A) = \bigcap_{a \in A} \mathcal{V}(a)$.

Definiţii 3. (i) O *mulţime deschisă* în $\mathbb{C}$ este o mulţime de puncte $D \subseteq \mathbb{C}$ care satisface condiţia că pentru orice $z \in D$, mulţimea D este o vecinătate a lui z, deci:

1) pentru orice $z \in D$ există $r > 0$ astfel încât $D_r(z) \subseteq D$ [1.5 Fig. 10].

(ii) O *mulţime închisă* în $\mathbb{C}$ este o mulţime de puncte $F \subseteq \mathbb{C}$ cu proprietatea că mulţimea complement $F^c = \mathbb{C} \setminus F$ este o mulţime deschisă, deci:

2) pentru orice $z \in F^c = \mathbb{C} \setminus F$ există $r > 0$ astfel încât $D_r(z) \cap F = \emptyset$.

Observaţii 4. Fie D şi F mulţimi de puncte în $\mathbb{C}$.

(i) D este deschisă în $\mathbb{C}$ dacă şi numai dacă $int(D) = D$; rezultă că mulţimea vidă $\emptyset$ şi mulţimea $\mathbb{C}$ sunt mulţimi deschise:

$int(\emptyset) = \emptyset$ şi $(\forall z \in \mathbb{C}) \left(\forall r \in \mathbb{R}_+^*\right) D_r(z) \subseteq \mathbb{C}$;

(ii) F este închisă în $\mathbb{C}$ dacă şi numai dacă $adh(F) = F$.

Condiţia [1.5 Def. 3 (i) 1)] pentru ca o mulţime D să fie deschisă exprimă implicit faptul că pentru orice punct $z \in D$ există un cerc $C_r(z)$ cu centrul în z

şi de rază $r > 0$ şi o regiune circulară plană $D_r(z)$ cu frontiera $C_r(z)$ în interiorul căreia orice segment orientat de origine z şi de extremitate un punct oarecare z^* situat pe orice rază de lungime cel mult egală cu $r^* < r$ este inclus în D [Fig. 10]. Din acest motiv, este convenabil ca studiul continuităţii şi diferenţiabilităţii să fie făcut pentru funcţii complexe definite pe mulţimi deschise.

Sunt definite următoarele operaţii cu mulţimi deschise:

1. dacă $n \in \mathbb{N}$ şi $(D_j)_{j=\overline{1,n}}$ este o familie finită de n mulţimi deschise atunci $\bigcap\limits_{j=1}^{n} D_j$ este o mulţime deschisă;
2. dacă J este o mulţime nevidă (nu neapărat finită) şi $(D_j)_{j \in J}$ este o familie de mulţimi deschise atunci $\bigcup\limits_{j \in J} D_j$ este o mulţime deschisă.

Condiţiile precedente 1. şi 2. împreună cu faptul că $\emptyset$ şi $\mathbb{C}$ sunt mulţimi deschise exprimă proprietatea că familia mulţimilor deschise în $\mathbb{C}$,

$$\tau = \{D \subseteq \mathbb{C} : D \text{ este deschisă}\},$$

formează o topologie pe $\mathbb{C}$. Această topologie τ coincide cu topologia canonică a spaţiului metric $(\mathbb{C}, d_2)$, unde

$$d_2 : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}_+ \text{ astfel încât } (\forall z, w \in \mathbb{C})\, d_2(z, w) = |z - w|,$$

este distanţa euclidiană în planul complex.

Consecinţe 5. Fie $a \in \mathbb{C}$. Sunt îndeplinite condiţiile următoare:

(i) $int(D_r(a)) = D_r(a)$, deci discul deschis $D_r(a)$ este o mulţime deschisă;

(ii) $adh(\overline{D_r}(a)) = \overline{D_r}(a)$, deci discul închis $\overline{D_r}(a)$ este o mulţime închisă;

(iii) frontiera discului deschis $D_r(a)$ coincide cu frontiera discului închis $\overline{D_r}(a)$ şi acestea reprezintă *cercul* $C_r(a) \subseteq \mathbb{C}$ *din planul complex cu centrul* $a \in \mathbb{C}$ *şi de rază* $r > 0$ care este o mulţime închisă:

$$C_r(a) = fr(D_r(a)) = fr(\overline{D_r}(a)) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| = r\}.$$

Observaţie 6. Planul complex $\mathbb{C}$ *este un spaţiu metric*, deci $\mathbb{C}$ este un *spaţiu topologic separat în sensul lui Hausdorff*: pentru orice $(z, w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ cu $z \neq w$, există D_z, D_w mulţimi deschise şi disjuncte $D_z \cap D_w = \emptyset$ cu $z \in D_z, w \in D_w$.

Definiţia 7. Fie $X, Y \subseteq \mathbb{C}$. Mulţimea X se numeşte *densă* în mulţimea Y dacă $Y \subseteq adh(X)$. Deci, mulţimea X este densă în $\mathbb{C}$ dacă şi numai dacă are loc relaţia $\mathbb{C} = adh(X)$.

Exemple 8. Mulţimea $\mathbb{Q} \times \{0\}$ este densă în $\mathcal{R}$ şi mulţimea $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ este densă în $\mathbb{C}$. Aceste rezultate se obţin pe baza faptului esenţial că mulţimea numerelor raţionale $\mathbb{Q}$ este densă în $\mathbb{R}$.

Reamintim acum definiţiile unor noţiuni cunoscute din planul euclidian real care sunt necesare în continuare. Aceste noţiuni generale de analiză reală sunt introduse în acelaşi mod în orice spaţiu vectorial real normat altul decât $\mathbb{C}$.

Definiţii 9. *(i)* O *mulţime mărginită* în $\mathbb{C}$ este o mulţime de puncte $M \subseteq \mathbb{C}$ cu proprietatea că există $a \in \mathbb{C}$ şi există $r > 0$ astfel încât $M \subseteq D_r(a)$.

(ii) O mulţime care nu este mărginită în $\mathbb{C}$ se numeşte *mulţime nemărginită*.

(iii) O *mulţime compactă* în $\mathbb{C}$ este o mulţime mărginită şi închisă în $\mathbb{C}$.

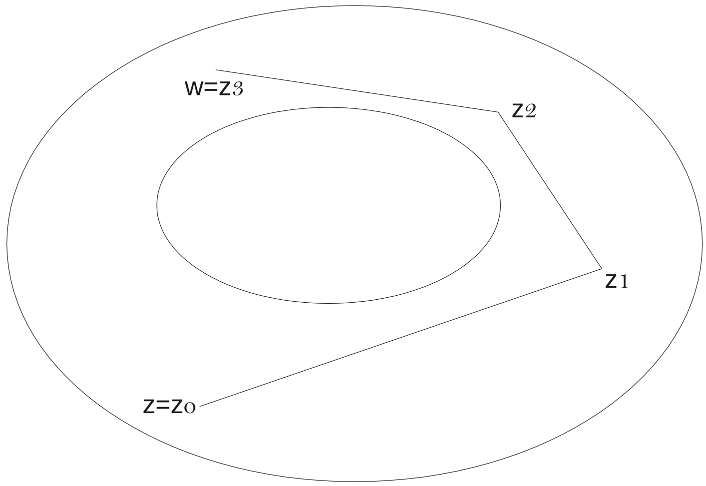

Figure 11: Mulţime poligonal conexă
$(z = z_0, w = z_3, L_p(z,w) = [z_0, z_1] \cup [z_1, z_2] \cup [z_2, z_3])$

(iv) O *mulţime conexă* în $\mathbb{C}$ este o mulţime de puncte $A \subseteq \mathbb{C}$ cu proprietatea că nu există o pereche de mulţimi deschise şi nevide (U, V) în $\mathbb{C}$ astfel încât $U \cap A \neq \emptyset, V \cap A \neq \emptyset, U \cap A \cap V = \emptyset$ şi $A \subseteq U \cup V$.

(v) O mulţime care nu este conexă în $\mathbb{C}$ se numeşte *mulţime neconexă*.

(vi) Un *domeniu* (o *regiune*) în $\mathbb{C}$ este o mulţime $D \subseteq \mathbb{C}$ deschisă şi conexă.

(vii) O *mulţime convexă* în $\mathbb{C}$ este o mulţime de puncte $S \subseteq \mathbb{C}$ cu proprietatea că pentru orice pereche de puncte $(a, b) \in S \times S$ rezultă că segmentul orientat $[a, b]$ este inclus în S, adică

$$[a, b] = \{(1 - \lambda) a + \lambda b : \lambda \in [0, 1]\} \subseteq S.$$

Exerciţiu 10. Daţi un exemplu de mulţime $P \subseteq \mathbb{C}$ satisfăcând condiţia că P este conexă şi P nu este convexă. Există mulţimi $Q \subseteq \mathbb{C}$ care sunt convexe şi nu sunt conexe ? Justificaţi răspunsul. O mulţime de puncte $M \subseteq \mathbb{C}$ se numeşte poligonal conexă dacă pentru orice pereche de puncte $(z, w) \in M \times M$ există o linie poligonală $L_p(z, w)$ conţinută în M de origine z şi de extremitate w, definită printr-un şir finit de puncte

$z = z_0, z_1, ..., z_n = w$ cu $L_p(z, w) = [z_0, z_1] \cup [z_1, z_2] \cup ... \cup [z_{n-1}, z_n] \subseteq M$.

Să se demonstreze următoarea implicaţie, pentru orice $M \subseteq \mathbb{C}$:

$(*)$ M poligonal conexă $\Rightarrow$ M conexă.

Implicaţia inversă are loc ? Justificaţi răspunsul. În legătură cu proprietatea precedentă $(*)$ în teorema următoare prezentăm o caracterizare a mulţimilor deschise poligonal conexe.

Teorema 11. Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ o mulţime nevidă de puncte în $\mathbb{C}$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(i) Mulţimea D este un domeniu [1.5 Def.9 (vi)].

(ii) Mulţimea D este deschisă şi poligonal conexă [1.5 Ex.10].

Demonstraţie. $(i) \Rightarrow (ii)$. Presupunem că D are proprietatea (i). Conform [1.5 Def.9 (vi)] rezultă că D este deschisă şi conexă [1.5 Def.9 (iv)]. Verificăm că D este şi poligonal conexă. Fie $a \in D$,

$D_1(a) = \{z \in D : \exists L_p(a,z) \subseteq D$ linie poligonală de la a la $z\}$

şi $D_2(a) = D \setminus D_1(a)$. Din $a \in D_1(a)$ rezultă că $D_1(a) \neq \emptyset$. Pentru a demonstra că D este poligonal conexă este suficient să arătăm că ambele mulţimi $D_1(a)$ şi $D_2(a)$ sunt deschise, deoarece în acest caz conform [1.5 Def.9 (iv)] şi ipotezei că D este conexă din $D_1(a) \cap D_2(a) = \emptyset$ şi $D_1(a) \cup D_2(a) = D$ rezultă exact relaţia dorită $D = D_1(a)$. Fie $z \in D$. Atunci $z \in D_1(a)$ sau $z \in D_2(a)$. Din faptul că D este deschisă rezultă că există $r \in \mathbb{R}_+^*$ astfel încât $D_r(z) \subseteq D$. Fie $w \in D_r(z)$, deci $[z,w] \subseteq D_r(z) \subseteq D$. Dacă $z \in D_1(a)$ atunci $w \in D_1(a)$ deoarece există o linie poligonală conţinută în D de la a la w via z, deci în acest caz rezultă $D_r(z) \subseteq D_1(a)$. Dacă $z \notin D_1(a)$ atunci $w \notin D_1(a)$. Prin urmare

$(\forall j = 1,2)\,[z \in D_j(a) \Rightarrow D_r(z) \subseteq D_j(a)]$,

deci într-adevăr $D_1(a)$ şi $D_2(a)$ sunt mulţimi deschise în $\mathbb{C}$.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Presupunem că D are proprietăţile (ii). Conform [1.5 Ex.10 $(*)$] din faptul că D este poligonal conexă rezultă că D este conexă, dar conform (ii) avem că D este şi deschisă, deci conform [1.5 Def.9 (iv)] rezultă (i).

Încheiem acest paragraf cu prezentarea extensiei funcţiei distanţă euclidiană pe $\mathbb{C}$ la o funcţie distanţă generalizată pe mulţimea părţilor lui $\mathbb{C}$,

$d_2 : \mathcal{P}(\mathbb{C}) \times \mathcal{P}(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}_+$.

Definiţii 12. Fie $A, B \subseteq \mathbb{C}$ astfel încât A şi B sunt nevide.

(i) *Diametrul lui* A este un număr real finit sau infinit, notat prin $diam(A) \in \overline{\mathbb{R}_+} = [0, +\infty]$ şi definit prin relaţia următoare:

$diam(A) = \sup\{|a_1 - a_2| : a_1, a_2 \in A\}$.

(ii) *Distanţa dintre mulţimile* A *şi* B este un număr real, $d_2(A,B) \geq 0$, definit prin relaţia următoare:

$d_2(A,B) = \inf\{|a - b| : (a,b) \in A \times B\}$.

1.6 Proiecţia stereografică

În spaţiul afin euclidian real $\mathbb{R}^3$ în raport cu un reper ortonormal $(OXYZ)$ considerăm sfera unitate $S_1(0) \subseteq \mathbb{R}^3$ de ecuaţie carteziană

$x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Identificăm mulţimea numerelor complexe $\mathbb{C}$ cu mulţimea punctelor din planul cartezian (XOY), deci numărul complex $z = x + iy \in \mathbb{C}$ se identifică cu punctul $P_z = (x, y, 0) \in \mathbb{R}^3$ din planul cartezian (XOY).

Fie $N = (0,0,1) \in S_1(0)$. Pentru orice $z \in \mathbb{C}$, fie $z[1] \in S_1(0)$ punctul unic de pe sfera $S_1(0)$ care reprezintă punctul de intersecţie al semidreptei NP_z cu sfera $S_1(0)$, deci

$NP_z \cap S_1(0) = \{z[1]\}$, pentru orice $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

Un punct oarecare al semidreptei NP_z este de forma

$(1 - \lambda)N + \lambda P_z = (0,0,1) + \lambda(x, y, -1) = (\lambda x, \lambda y, 1 - \lambda)$ cu $\lambda > 0$

şi acest punct coincide cu $z[1]$ dacă aparţine sferei $S_1(0)$, deci

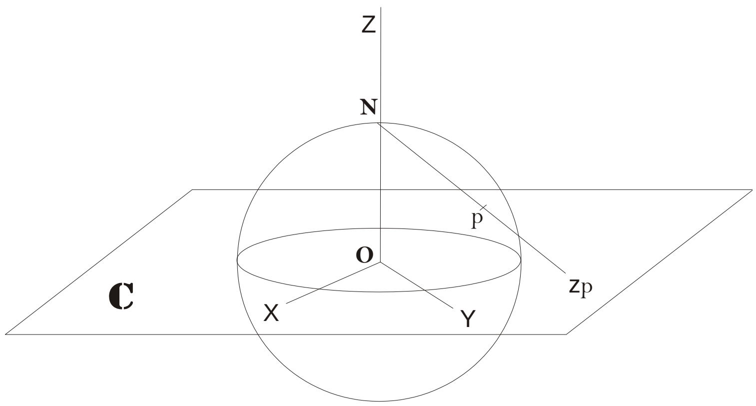

Figure 12: Plan complex extins

$$z[1] = (\lambda x, \lambda y, 1 - \lambda)$$

pentru $\lambda > 0$ verificând relaţia

$$\lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2 + (1 - \lambda)^2 = 1,$$

ceea ce implică

$$\lambda = \frac{2}{1+x^2+y^2} = \frac{2}{1+|z|^2}.$$

Rezultă că pentru orice $z = x + iy \in \mathbb{C}$,

$$z[1] = \left(\frac{2x}{1+|z|^2}, \frac{2y}{1+|z|^2}, \frac{|z|^2-1}{1+|z|^2} \right) \in S_1(0).$$

Fie ∞ un element fixat astfel încât $\infty \notin \mathbb{C}$. Definim o mulţime $\overline{\mathbb{C}}$ care extinde mulţimea $\mathbb{C}$ prin relaţia: $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Fie $g : \overline{\mathbb{C}} \to S_1(0)$ funcţia definită prin condiţiile următoare:

$$g(\infty) = (0, 0, 1) = N \text{ şi } g(z) = z[1], \text{ dacă } z = x + iy \in \mathbb{C}.$$

Atunci g este o funcţie bijectivă de la $\overline{\mathbb{C}}$ pe sfera unitate $S_1(0)$.

Proiecţia stereografică este funcţia $f : S_1(0) \to \overline{\mathbb{C}}$ care reprezintă inversa funcţiei bijective $g : \overline{\mathbb{C}} \to S_1(0)$ definite anterior. Rezultă că f satisface relaţiile:

$$f(N) = \infty \text{ şi } f(P) = z_P, \text{ dacă } P \in S_1(0) \setminus \{N\},$$

unde $z_P = x_P + iy_P \in \mathbb{C}$ este numărul complex unic definit de punctul de intersecţie al semidreptei NP cu planul (XOY):

$$NP \cap (XOY) = \{(x_P, y_P, 0)\}, \text{ dacă } P \in S_1(0) \setminus \{N\}.$$

Dacă $P = (x, y, z) \in S_1(0) \setminus \{N\}$ atunci

$$z \neq 1 \text{ şi } x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

deci din condiţia $(x_P, y_P, 0) \in NP$ rezultă următoarea expresie analitică a proiecţiei stereografice $f : S_1(0) \to \overline{\mathbb{C}}$:

$$f(0, 0, 1) = \infty,$$

$$f(x, y, z) = \frac{x}{1-z} + i\frac{y}{1-z}, \text{ dacă } x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ şi } z \neq 1.$$

1.7 Planul complex extins

Fie $d_3 : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_+$ distanţa euclidiană şi $N = (0,0,1)$. Pentru orice puncte din spaţiul real $P, Q \in \mathbb{R}^3$ şi orice număr complex $z = x + iy \in \mathbb{C}$ notăm $|PQ| = d_3(P,Q)$ şi $|Nz| = d_3(N, P_z) = \sqrt{1 + |z|^2}$, unde $P_z = (x, y, 0) \in \mathbb{R}^3$. Considerăm mulţimea $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ şi funcţia bijectivă $g : \overline{\mathbb{C}} \to S_1(0)$ de la $\overline{\mathbb{C}}$ pe sfera unitate $S_1(0)$ definite în paragraful precedent 1.6. Definim o funcţie $q : \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}} \to \mathbb{R}_+$ prin condiţia că pentru orice $(\alpha, \beta) \in \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$,

$$q(\alpha, \beta) = d_3(g(\alpha), g(\beta)) = |g(\alpha)g(\beta)|,$$

deci $q(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+$ este lungimea coardei

$$[g(\alpha), g(\beta)] = \{(1-\lambda) g(\alpha) + \lambda g(\beta) : \lambda \in [0,1]\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

determinate în spaţiul euclidian real $\mathbb{R}^3$ de perechea de puncte ale sferei unitate $(g(\alpha), g(\beta))$ corespunzătoare perechii de puncte (α, β) prin funcţia bijectivă

$$g \times g : \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}} \to S_1(0) \times S_1(0).$$

Exerciţiu 1. *Funcţia $q : \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}} \to \mathbb{R}_+$ este o funcţie distanţă pe $\overline{\mathbb{C}}$.*

Rezolvare. Fie $\alpha, \beta, \gamma \in \overline{\mathbb{C}}$. Rezultă

$$q(\alpha, \beta) = d_3(g(\alpha), g(\beta)) = d_3(g(\beta), g(\alpha)) = q(\beta, \alpha) \geq 0,$$

deci q este o funcţie nenegativă şi simetrică. Deoarece g este injectivă obţinem:

$$q(\alpha, \beta) = 0 \Leftrightarrow d_3(g(\alpha), g(\beta)) = 0 \Leftrightarrow g(\alpha) = g(\beta) \Leftrightarrow \alpha = \beta.$$

În plus, din inegalitatea triunghiului pentru distanţa euclidiană din $\mathbb{R}^3$ rezultă

$$q(\alpha, \gamma) = d_3(g(\alpha), g(\gamma)) \leq d_3(g(\alpha), g(\beta)) + d_3(g(\beta), g(\gamma)) = q(\alpha, \beta) + q(\beta, \gamma),$$

deci q satisface inegalitatea triunghiului pe $\overline{\mathbb{C}}$.

Definiţia 2. *Planul complex extins* este spaţiul metric $(\overline{\mathbb{C}}, q)$ cu mulţimea punctelor $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ şi funcţia distanţă q definită anterior pe care o numim *distanţa sferică*. Elementul $\infty \in \overline{\mathbb{C}}$ se numeşte *punctul de la infinit.*

Convenţii de calcul în $\overline{\mathbb{C}}$. Când se lucrează în $\overline{\mathbb{C}}$ se adoptă următoarele convenţii:

$(\forall a \in \mathbb{C})\, a \pm \infty = \pm\infty + a = \infty,$
$(\forall a \in \mathbb{C})\, a \cdot \infty = \infty \cdot a = \infty,$
$\infty + \infty = \infty \cdot \infty = \overline{\infty} = \infty,$
$(\forall a \in \mathbb{C})\, \frac{a}{\infty} = 0,$
$(\forall a \in \mathbb{C} \setminus \{0\})\, \frac{a}{0} = \infty.$

Expresiile $\infty - \infty$ şi $\frac{\infty}{\infty}$ nu sunt definite.

Exerciţiul următor stabileşte *relaţia dintre distanţa sferică* restrânsă la $\mathbb{C}$ *şi distanţa euclidiană d_2 în planul complex* $\mathbb{C}$. Acest rezultat se utilizează pentru caracterizarea mulţimilor deschise în planul complex extins.

Exerciţiu 3. Funcţia q satisface condiţiile următoare, pentru orice $z, w \in \mathbb{C}$:

1) $q(z, \infty) = \frac{2}{\sqrt{1+|z|^2}}$,

2) $q(z, w) = \frac{1}{2}|z - w|\, q(z, \infty) q(w, \infty).$

Rezolvare. Fie $z, w \in \mathbb{C}$.

1) Din definiţiile funcţiilor $q : \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}} \to \mathbb{R}_+$ şi $g : \overline{\mathbb{C}} \to S_1(0)$ rezultă

$q(z, \infty) = d_3(g(z), g(\infty)) = d_3(z[1], N) =$

$\sqrt{\left(\frac{2x}{1+|z|^2}\right)^2+\left(\frac{2y}{1+|z|^2}\right)^2+\left(\frac{|z|^2-1}{1+|z|^2}-1\right)^2}=$

$\sqrt{\frac{4(x^2+y^2+1)}{\left(1+|z|^2\right)^2}}=$

$\frac{2}{\sqrt{1+|z|^2}}$,

ceea ce implică **1)**.

2) Din relaţia **1)** rezultă

$$q(z,\infty)=|Nz[1]|=\frac{2}{|Nz|}$$

şi din definiţia funcţiei q obţinem

$$q(z,w)=|z[1]w[1]|.$$

Utilizând teorema cosinusului în triunghiurile P_zNP_w şi $z[1]Nw[1]$ pentru unghiul lor comun

$$\gamma=\widehat{P_zNP_w}=\widehat{z[1]Nw[1]}$$

cu vârful în N rezultă următoarele relaţii:

$$|z[1]w[1]|^2=|Nz[1]|^2+|Nw[1]|^2-2\,|Nz[1]|\,|Nw[1]|\cos\gamma,$$
$$|z-w|^2=|Nz|^2+|Nw|^2-2\,|Nz|\,|Nw|\cos\gamma.$$

Obţinem următorul şir de egalităţi:

$[q(z,w)]^2=|z[1]w[1]|^2=$

$\frac{4}{|Nz|^2}+\frac{4}{|Nw|^2}-2\frac{2}{|Nz|}\frac{2}{|Nw|}\cos\gamma=$

$\frac{4}{|Nz|^2|Nw|^2}\,|z-w|^2$,

deci

$q(z,w)=\frac{1}{2}\,|z-w|\,\frac{2}{|Nz|}\,\frac{2}{|Nw|}=\frac{1}{2}\,|z-w|\,q(z,\infty)q(w,\infty)$,

ceea ce implică egalitatea **2)** din enunţ.

Exerciţiile următoare exprimă faptul că proiecţia stereografică transformă cercurile sferei unitate în cercuri din planul complex $\mathbb{C}$ sau drepte din planul complex $\mathbb{C}$ reunite cu punctul de la infinit ∞.

Exerciţiu 4. Fie $\Gamma\subseteq S_1(0)$ un *cerc pe sfera unitate* din $\mathbb{R}^3$. Dacă $N\notin\Gamma$ atunci există un *cerc în planul complex* $\gamma\subseteq\mathbb{C}=(XOY)$ astfel încât $g(\gamma)=\Gamma$. Dacă $N\in\Gamma$ atunci există o *dreaptă în planul complex* $d\subseteq\mathbb{C}=(XOY)$ astfel încât $g(d\cup\{\infty\})=\Gamma$.

Rezolvare. Din ipoteză rezultă că $\Gamma=S_1(0)\cap\pi$, unde $\pi\subseteq\mathbb{R}^3$ este un plan, $\pi: Ax+By+Cz=D$ cu $A^2+B^2+C^2\neq 0$.

Fie $z=x+iy\in\mathbb{C}$. Atunci

$g(z)=z[1]\in\pi\Leftrightarrow A(2x)+B(2y)+C(|z|^2-1)=D(1+|z|^2)$,

de unde rezultă

$g(z)\in\pi\Leftrightarrow(C-D)(x^2+y^2)+2Ax+2By=C+D$.

Dacă $N\notin\Gamma$ atunci $C\neq D$, deci există un cerc $\gamma\subseteq\mathbb{C}$ de ecuaţie

$$\gamma:(C-D)(x^2+y^2)+2Ax+2By=C+D$$

astfel încât $g(\gamma)=\Gamma$. Dacă $N\in\Gamma$ atunci $C=D$ şi $A^2+B^2\neq 0$, deci există o dreaptă în planul complex $d\subseteq\mathbb{C}$ de ecuaţie $d: Ax+By=C$ astfel încât $g(d\cup\{\infty\})=\Gamma$.

Exerciţiu 5. Dacă $d \subseteq \mathbb{C}$ este o dreaptă şi $\gamma \subseteq \mathbb{C}$ este un cerc în planul complex atunci mulţimile imagine $g(d \cup \{\infty\}) \subseteq S_1(0)$ şi $g(\gamma) \subseteq S_1(0)$ sunt ambele cercuri pe sfera unitate astfel încât $N \in g(d \cup \{\infty\})$ şi $N \notin g(\gamma)$.

Rezolvare. Fie $d \subseteq \mathbb{C}$ o dreaptă în planul complex de ecuaţie

$$d : Ax + By = C \ (A^2 + B^2 \neq 0).$$

Din relaţia

$$g(z) = \left(\tfrac{2x}{1+|z|^2}, \tfrac{2y}{1+|z|^2}, \tfrac{|z|^2-1}{1+|z|^2}\right)$$

rezultă că $g(d \cup \{\infty\}) = \Gamma$, unde $\Gamma = S_1(0) \cap \pi_d$ este intersecţia dintre sfera $S_1(0)$ şi planul π_d de ecuaţie $Ax + By + Cz = C$, deci Γ este un cerc cu $N \in \Gamma$.

Fie $\gamma \subseteq \mathbb{C}$ un cerc în planul complex de ecuaţie

$$\gamma : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \ (r > 0).$$

Din ecuaţia cercului

$$\gamma : (x^2 + y^2) - 2x_0x - 2y_0y = r^2 - (x_0^2 + y_0^2)$$

şi definiţia lui g rezultă că $g(\gamma) = \Gamma$, unde $\Gamma = S_1(0) \cap \pi_\gamma$ este intersecţia dintre $S_1(0)$ şi planul π_γ de ecuaţie

$$\pi_\gamma : Ax + By + Cz = D,$$

cu coeficienţii (A, B, C, D) satisfăcând relaţiile următoare:

$$\begin{cases} A = -x_0 \\ B = -y_0 \\ C - D = 1 \\ C + D = r^2 - (x_0^2 + y_0^2) \end{cases}.$$

Deci $g(\gamma) = \Gamma$ şi Γ este un cerc astfel încât $N \notin \Gamma$.

Definiţii 6. Pentru $\alpha \in \overline{\mathbb{C}}$ şi $r > 0$ notăm

$Q_r(\alpha) = \{\beta \in \overline{\mathbb{C}} : q(\beta, \alpha) < r\}$ şi $\overline{Q}_r(\alpha) = \{\beta \in \overline{\mathbb{C}} : q(\beta, \alpha) \leq r\}$;

$V(\alpha) = \{V \subseteq \overline{\mathbb{C}} : (\exists r > 0) Q_r(\alpha) \subseteq V\}$.

(*i*) Mulţimea $Q_r(\alpha)$ se numeşte un *disc sferic deschis* şi mulţimea $\overline{Q}_r(\alpha)$ se numeşte un *disc sferic închis cu centrul în* α *şi de rază* r.

(*ii*) O mulţime $V \in V(\alpha)$ se numeşte o vecinătate a lui α în $\overline{\mathbb{C}}$.

(*iii*) O mulţime $D \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ se numeşte mulţime deschisă în planul complex extins $(\overline{\mathbb{C}}, q)$ dacă verifică următoarea relaţie:

$$(\forall \alpha \in D) \ D \in V(\alpha).$$

Exerciţiu 7. Sunt îndeplinite condiţiile următoare:

1) $q(\alpha, \beta) \leq 2, \forall (\alpha, \beta) \in \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$;

2) $q(z, w) \leq 2\,|z - w|\,, \forall (z, w) \in \mathbb{C}^2$;

3) $\overline{\mathbb{C}} = \overline{Q}_2(0) = \{\alpha \in \overline{\mathbb{C}} : q(\alpha, 0) \leq 2\}$.

Rezolvare. **1)** Fie $(\alpha, \beta) \in \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$. Rezultă

$q(\alpha, \beta) = d_3(g(\alpha), g(\beta)) \leq diam(S_1(0)) = 2$,

unde $diam(S_1(0))$ este diametrul sferei unitate [1.5 Def. 10. (*i*)]

2) Relaţia din enunţ rezultă din [1.7 Ex. 3. 2)] şi [1.7 Ex 7. 1)].

3) Fie $\alpha \in \overline{\mathbb{C}}$. Dacă $\alpha = z \in \mathbb{C}$ atunci

$q(\alpha, 0) = d_3(z[1], 0[1]) < d_3(N, 0[1]) = 2$.

Dacă $\alpha = \infty$ atunci $q(\alpha, 0) = d_3(N, 0[1]) = 2$.

În exerciţiile următoare se prezintă proprietăţi din care rezultă *echivalenţa dintre spaţiile metrice* $(\mathbb{C}, d_2)$ *şi* $(\mathbb{C}, q)$ împreună cu *caracterizarea mulţimilor deschise ale planului complex extins* $(\overline{\mathbb{C}}, q)$.

Exerciţiu 8. Fie $z_0 \in \mathbb{C}$ şi $r > 0$.
1) Există $\rho > 0$ astfel încât $D_\rho(z_0) \subseteq Q_r(z_0)$.
2) Există $\delta > 0$ astfel încât $Q_\delta(z_0) \subseteq D_r(z_0)$.

Rezolvare. **1)** Fie $\rho = r/2$. Conform [1.7 Ex. 7. 2)] din $|z - z_0| < \rho = r/2$ rezultă $q(z, z_0) \leq 2\,|z - z_0| < 2\rho = r$, deci $D_\rho(z_0) \subseteq Q_r(z_0)$.
2) Fie $\delta > 0$ şi $z \in \mathbb{C}$. Conform [1.7 Ex. 3. 2)] rezultă
$q(z, z_0) < \delta \Leftrightarrow |z - z_0| < \frac{2\delta}{q(z,\infty)q(z_0,\infty)}$.
Din relaţia $q(z_0, \infty) \leq q(z, z_0) + q(z, \infty)$, deducem
$q(z, z_0) < \delta \Rightarrow q(z, \infty) > q(z_0, \infty) - \delta$.
Deci, pentru orice $z \in \mathbb{C}$ şi $\delta > 0$ cu proprietatea $q\,(z_0, \infty) - \delta > 0$ este satisfăcută următoarea implicaţie:
(1) $q(z, z_0) < \delta \Rightarrow |z - z_0| < \frac{2\delta}{q(z_0,\infty)[q(z_0,\infty)-\delta]}$.
Există $\delta > 0$ astfel încât
(2) $q\,(z_0, \infty) - \delta > 0$ şi $\frac{2\delta}{q(z_0,\infty)[q(z_0,\infty)-\delta]} \leq r$.
De exemplu, dacă definim δ prin relaţia următoare:
(3) $\delta = \min\left(\frac{1}{2} q\,(z_0, \infty)\,, \frac{r[q(z_0,\infty)]^2}{2 + rq(z_0,\infty)}\right)$,
rezultă (2).

Din (1) şi (2) rezultă că pentru $\delta > 0$ dat prin (3) este satisfăcută următoarea implicaţie, pentru orice $z \in \mathbb{C}$:
$$q(z, z_0) < \delta \Rightarrow |z - z_0| < r,$$
ceea ce implică relaţia din enunţ:
$$Q_\delta(z_0) \subseteq D_r(z_0),$$
deci **2)** are loc.

Exerciţiu 9. Fie $D \subseteq \mathbb{C}$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:
(i) Mulţimea D este deschisă în spaţiul metric $(\mathbb{C}, d_2)$.
(ii) Mulţimea D este deschisă în spaţiul metric $(\mathbb{C}, q)$.

Rezolvare. $(i) \Rightarrow (ii)$. Presupunem (i). Fie $z_0 \in D$. Din (i) rezultă că există $r > 0$ astfel încât $D_r(z_0) \subseteq D$, dar conform [1.7 Ex.8. 2)] există $\delta > 0$ astfel încât $Q_\delta(z_0) \subseteq D_r(z_0)$, deci există $\delta > 0$ astfel încât $Q_\delta(z_0) \subseteq D$. Rezultă (ii).
$(ii) \Rightarrow (i)$. Presupunem (ii). Fie $z_0 \in D$. Din (ii) rezultă că există $r > 0$ astfel încât $Q_r(z_0) \subseteq D$, dar conform [1.7 Ex. 8. 1)] există $\rho > 0$ astfel încât $D_\rho(z_0) \subseteq Q_r(z_0)$, deci există $\rho > 0$ astfel încât $D_\rho(z_0) \subseteq D$. Rezultă (i).

Exerciţiu 10. Fie $D \subseteq \overline{\mathbb{C}}$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:
(i) Mulţimea D este deschisă în planul complex extins $(\overline{\mathbb{C}}, q)$.
(ii) Mulţimea D are una din următoarele proprietăţi:
d1) $\infty \notin D$ şi mulţimea D este deschisă în spaţiul metric $(\mathbb{C}, d_2)$;
d2) $\infty \in D$ şi există o mulţime compactă K în spaţiul metric $(\mathbb{C}, d_2)$ astfel încât $D = \overline{\mathbb{C}} \setminus K$.

Rezolvare. $(i) \Rightarrow (ii)$. Presupunem (i). Dacă $D = \overline{\mathbb{C}}$ atunci d2) are loc pentru $K = \emptyset$. Presupunem că $D \neq \overline{\mathbb{C}}$. Dacă $\infty \notin D$ atunci $D \subseteq \mathbb{C}$ şi D este deschisă în $(\mathbb{C}, q)$, deci conform [1.7 Ex. 9] rezultă că d1) are loc. Considerăm acum cazul $\infty \in D$. În acest caz, conform ipotezei (i) rezultă că există $r > 0$ astfel încât $r \leq 2$ şi $Q_r(\infty) \subseteq D$. Fie $K = \overline{\mathbb{C}} \setminus D = (D \setminus \{\infty\})^{c} \subseteq \mathbb{C}$. Conform ipotezei (i) rezultă de asemenea că $D \setminus \{\infty\} \subseteq \mathbb{C}$ este o mulţime deschisă în $(\mathbb{C}, q)$, deci conform [1.7 Ex. 9] această mulţime este deschisă în $(\mathbb{C}, d_2)$. Rezultă că mulţimea K este închisă în $(\mathbb{C}, d_2)$. Din relaţia $Q_r(\infty) \subseteq D$ şi definiţia mulţimii K rezultă

$(\forall z \in K = \overline{\mathbb{C}} \setminus D)\ q(z, \infty) = \frac{2}{\sqrt{1+|z|^2}} \geq r,$

ceea ce implică relaţia

$K \subseteq \overline{D}_\delta(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \delta\}$ cu $\delta = \frac{1}{r}\sqrt{4 - r^2}$.

Prin urmare, K este mărginită şi închisă în $(\mathbb{C}, d_2)$, deci K este compactă şi $D = \overline{\mathbb{C}} \setminus K$, ceea ce înseamnă că d2) are loc. Proprietatea (ii) este verificată.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Presupunem (ii). Dacă D verifică d1) atunci conform [1.7 Ex. 9] rezultă că (i) are loc. Presupunem că D verifică d2), deci $\infty \in D = \overline{\mathbb{C}} \setminus K$, unde $K \subseteq \mathbb{C}$ este mărginită şi închisă în planul complex $\mathbb{C}$. Rezultă că există $\delta > 0$ astfel încât $K \subseteq \overline{D}_\delta(0)$. Fie $\alpha \in D$. Verificăm (i) considerând două cazuri.

Cazul 1. $\alpha = \infty$; alegem $r \in \mathbb{R}_+^*$ astfel încât

$0 < r < \frac{2}{\sqrt{1+\delta^2}}$

şi deducem că pentru orice $z \in \mathbb{C}$,

$z \in Q_r(\alpha) \Rightarrow q(z, \alpha) = q(z, \infty) = \frac{2}{\sqrt{1+|z^2|}} < r \Rightarrow$

$\frac{2}{\sqrt{1+|z^2|}} < \frac{2}{\sqrt{1+\delta^2}} \Rightarrow |z| > \delta \Rightarrow z \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}_\delta(0) \Rightarrow z \in \mathbb{C} \setminus K,$

deci în acest caz rezultă

$Q_r(\alpha) = Q_r(\infty) \subseteq D = \overline{\mathbb{C}} \setminus K.$

Cazul 2. $\alpha \in \mathbb{C}$; în acest caz rezultă că $\alpha \in \mathbb{C} \cap D = \mathbb{C} \setminus K$ cu $\mathbb{C} \setminus K$ deschisă în $(\mathbb{C}, d_2)$, dar conform [1.7 Ex. 9] deducem că $\mathbb{C} \setminus K$ este o mulţime deschisă în $(\mathbb{C}, q)$, deci există $r > 0$ astfel încât $Q_r(\alpha) \subseteq \mathbb{C} \setminus K \subseteq D$.

Prin urmare, (i) are loc.

1.8 Teme de casă

1.8.1 Set 1

1. (i) Să se reprezinte în forma exponenţială $re^{i\theta}$ numerele complexe:
   a) $1 - i$ *b)* i^7 *c)* $\sqrt{2}\,(1 + i)$ *d)* $2\left(1 + \sqrt{3}i\right)$
   (ii) Să se reprezinte în forma carteziană $x + iy$ numerele complexe:
   a) $e^{\frac{\pi i}{3}}$ *b)* $7e^{-i\pi}$ *c)* $3e^{\frac{7i\pi}{2}}$ *d)* $e^{\frac{3\pi i}{2}}$

2. Să se reprezinte în forma polară $|z|\,(\cos\arg z + i \sin\arg z)$ următoarele numere complexe z definite prin:
   a) $(1 - i)\left(1 - i\sqrt{3}\right)$ *b)* $(1 - i)^{-1}$ *c)* $\frac{\sqrt{2}-i}{1+i}$
   d) $\left(1 - \sqrt{3}i\right)^3$.

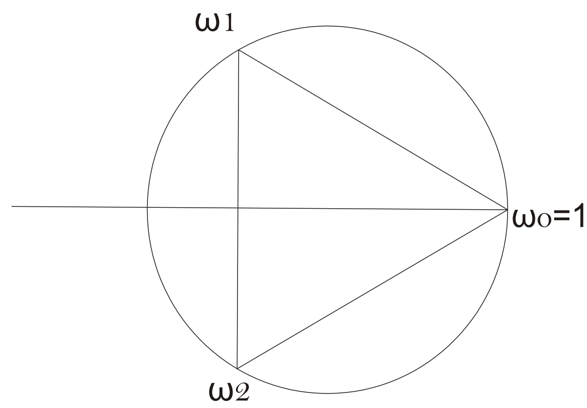

Figure 13: Rădăcinile ecuaţiei cubice $z^3 = 1$ [ex. 6 *a*)]

3. Să se reprezinte următoarele ecuaţii cu variabila necunoscută $z \in \mathbb{C}$ sub forma unor ecuaţii depinzând de variabilele r şi φ, unde $z = re^{i\varphi}$:
   a) $|z|^3 = 27$ *b*) $\left|z^2 - 1\right| = 1$ *c*) $\arg z = \frac{2\pi}{3}$
   d) $\arg(iz) = \frac{\pi}{4}$ *e*) $\arg\left(z^2\right) = \frac{\pi}{2}$.

4. Pentru orice număr natural $n \in \mathbb{N}$, să se calculeze:
   a) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n$ *b*) $\left(\sqrt{3}+i\right)^n + \left(\sqrt{3}-i\right)^n$.

5. Utilizând expresia sumei finite de numere complexe $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} e^{ik\varphi}$, să se demonstreze următoarea formulă de calcul:
   $-1 + 2\sum\limits_{k=1}^{n} \cos(k\varphi) = \frac{\sin\left((2n+1)\frac{\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$, dacă $\varphi \neq 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

   Explicitaţi formula de calcul a sumei $\sum\limits_{k=1}^{n} \sin(k\varphi)$.

6. Utilizând soluţiile ecuaţiei $\cos n\varphi + i \sin n\varphi = -1$ (necunoscuta $\varphi \in \mathbb{R}$ şi $n \in \mathbb{N}$ fixat), să se rezolve ecuaţiile următoare cu necunoscuta $z \in \mathbb{C}$:
   a) $z^3 - 1 = 0$ *b*) $z^4 + 1 = 0$ *c*) $z^6 + 1 = 0$.

7. Să se rezolve ecuaţiile următoare cu necunoscuta $z \in \mathbb{C}$:
   a) $z^7 + z^6 + ... + z + 1 = 0$,
   b) $(z+1)^6 - (z-1)^6 = 0$,
   c) $z^2 - z + 1 = 0$,
   d) $z^6 - z^4 + z^2 - z + 1 = 0$.

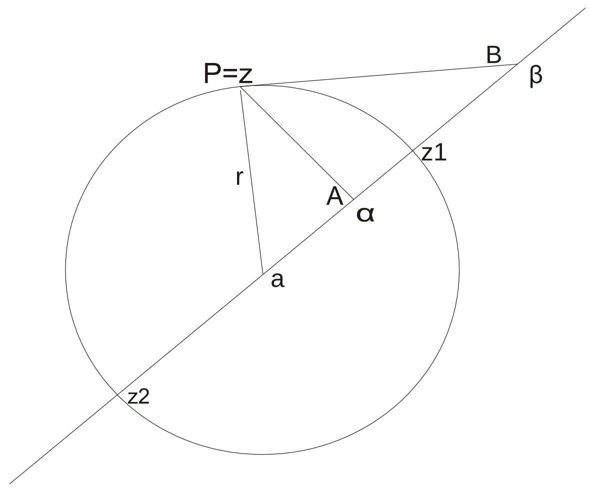

Figure 14: Cercul lui Apollonius [1.8.2 Ex. 1]

8. Fie $z \in \mathbb{C}$ astfel încât $z^3 = -1$ şi $z \neq -1$. Să se determine valoarea expresiei $\frac{1}{z^2(z-1)^2}$.

9. Să se demonstreze că pentru orice $z \in \mathbb{C}$:
$|z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| \leq \sqrt{2}\,|z|$. Daţi exemple de numere complexe z pentru care inegalităţile precedente sunt stricte.

10. Fie $z, w \in \mathbb{C}$. Să se demonstreze identitatea:
$|z+iw|^2 + |w+iz|^2 = 2\left(|z|^2 + |w|^2\right)$.

11. Utilizând ex. 7. să se demonstreze că pentru orice $z, w \in \mathbb{C}$:
$|1-\overline{z}w|^2 - |z-w|^2 = \left(1-|z|^2\right)\left(1-|w|^2\right)$. Să se deducă de aici că dacă $|z| < 1$ şi $|w| < 1$ atunci $\left|\frac{z-w}{1-\overline{z}w}\right| < 1$.

12. Fie $z, w \in \mathbb{C}$ astfel încât $z \neq w$.
(i) Să se demonstreze că $\operatorname{Re}\left(\frac{w+z}{w-z}\right) = \frac{|w|^2-|z|^2}{|w-z|^2}$.
(ii) Fie $z = re^{i\theta}$ şi $w = Re^{i\varphi}$, cu $0 < r < R$. Utilizând relaţia
$|w-z|^2 = (w-z)\left(\overline{w}-\overline{z}\right)$ să se demonstreze că
$|w-z|^2 = R^2 - 2Rr\cos(\theta-\varphi) + r^2$.
Să se deducă relaţia următoare:
$\operatorname{Re}\left(\frac{w+z}{w-z}\right) = \frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}$.

1.8.2 Set 2

1. Fie $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ cu $\alpha \neq \beta$ şi $\lambda \in \mathbb{R}$ cu $\lambda > 0$ şi $\lambda \neq 1$. Să se demonstreze că ecuaţia următoare reprezintă un cerc C: $\left|\frac{z-\alpha}{z-\beta}\right| = \lambda$. Arătaţi că cercul C coincide cu cercul lui Apollonius definit prin locul geometric al punctelor P din plan cu proprietatea că $\frac{AP}{PB} = \lambda$, unde $A = \alpha$, $B = \beta$ şi $P = z$.
   Indicaţie Fie $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$ şi $\beta = \beta_1 + i\beta_2$. Pentru $z = x + iy$ stabiliţi că ecuaţia din enunţ $\left|\frac{z-\alpha}{z-\beta}\right| = \lambda$ este echivalentă cu o ecuaţie de forma $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$, unde $r > 0$, $x_0 = \frac{\alpha_1 - \lambda^2\beta_1}{1-\lambda^2}$ şi $y_0 = \frac{\alpha_2 - \lambda^2\beta_2}{1-\lambda^2}$.

2. Fie $z \in \mathbb{C}$, $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{C}$ dreapta reală şi $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{C}$ dreapta imaginară. Atunci:
   2.1 $z \in \mathcal{R} \Leftrightarrow$ una din următoarele condiţii este îndeplinită:
   a) $\operatorname{Im} z = 0$,
   b) $z = \overline{z}$,
   c) $|z - \alpha| = |z - \overline{\alpha}|$ cu $\alpha \in \mathbb{C}$ astfel încât $\operatorname{Im} \alpha \neq 0$.
   2.2 $z \in \mathcal{I} \Leftrightarrow$ una din următoarele condiţii este îndeplinită:
   a) $\operatorname{Re} z = 0$,
   b) $z = -\overline{z}$,
   c) $|z - 1| = |z + 1|$.

3. Fie $\alpha, \beta \in C_r(P_0)$ puncte distincte $\alpha \neq \beta$ pe cercul cu centrul în punctul $P_0(x_0, y_0)$ şi de rază $r > 0$. Fie P un punct variabil pe un arc γ al cercului respectiv de extremităţi $A = \alpha$ şi $B = \beta$. Atunci mărimea unghiului $\widehat{APB}$ este o constantă μ. Să se demonstreze că ecuaţia arcului circular γ este următoarea:
   $\arg\left(\frac{z-\alpha}{z-\beta}\right) = \mu \pmod{2\pi}$.
   Fie Q un punct pe arcul δ opus lui γ având aceleaşi extremităţi α şi β. Atunci unghiul $\widehat{AQB}$ are o mărime constantă egală cu $\pi - \mu$. Să se demonstreze că ecuaţia arcului circular δ este următoarea:
   $\arg\left(\frac{z-\alpha}{z-\beta}\right) = -(\pi - \mu) \pmod{2\pi}$.

1.8.3 Set 3

1. Punctele $p, q \in \mathbb{C}$ cu $p \neq q$ se numesc *inverse* în raport cu un cerc $C_r(a)$ de centru $a \in \mathbb{C}$, de rază $r > 0$ ($r \in \mathbb{R}$) şi de ecuaţie carteziană $|z - a| = r$ dacă verifică relaţia următoare: $(p - a)\overline{(q - a)} = r^2$. Fie $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ cu $\alpha \neq \beta$ şi $\lambda \in \mathbb{R}$ cu $\lambda > 0$.
   a) Să se demonstreze că dacă $\lambda \neq 1$ atunci punctele α şi β sunt puncte inverse în raport cu cercul lui Apollonius de ecuaţie $\left|\frac{z-\alpha}{z-\beta}\right| = \lambda$ (a se vedea 1.8.2 Ex.1).
   b) Fie $d(\alpha, \beta) = \left\{z \in \mathbb{C} : \left|\frac{z-\alpha}{z-\beta}\right| = 1\right\} \subseteq \mathbb{C}$. Să se precizeze graficul mulţimii de puncte $d(\alpha, \beta)$ şi interpretarea geometrică a punctelor α şi β în raport cu $d(\alpha, \beta)$.
   c) Fie $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ cu $\alpha \neq \beta$. Definim două familii de cercuri astfel:

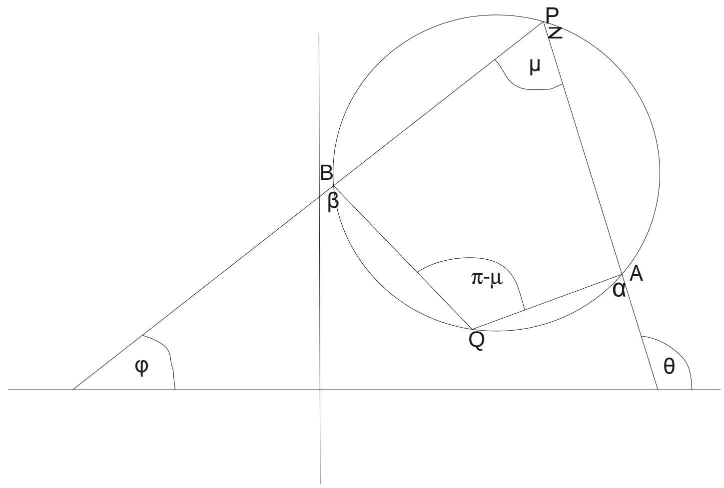

Figure 15: Arcele circulare opuse $\widehat{APB}$ şi $\widehat{AQB}$

1) $C_1^{\lambda}(\alpha,\beta)$ astfel încât $z \in C_1^{\lambda}(\alpha,\beta) \Leftrightarrow \left|\frac{z-\alpha}{z-\beta}\right| = \lambda$ cu $\lambda \in \mathbb{R}$ şi $\lambda > 0$, deci pentru $\lambda \neq 1$ rezultă că $C_1^{\lambda}(\alpha,\beta)$ este un cerc Apollonius având α şi β puncte inverse, iar pentru $\lambda = 1$ avem că $C_1^{\lambda}(\alpha,\beta) = d(\alpha,\beta)$ este mulţimea de puncte de la b);
2) $C_2^{\mu}(\alpha,\beta)$ astfel încât
$z \in C_2^{\mu}(\alpha,\beta) \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z-\alpha}{z-\beta}\right) = \begin{cases} \mu \\ -(\pi-\mu) \end{cases} \pmod{2\pi}$,
relativ la α şi β cu $\mu \in \mathbb{R}$. Familiile de cercuri $\left(C_1^{\lambda}(\alpha,\beta)\right)_{\lambda\in\mathbb{R}_+^*}$ şi $\left(C_2^{\mu}(\alpha,\beta)\right)_{\mu\in\mathbb{R}}$ se numesc cercuri coaxiale. Să se demonstreze că pentru orice $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ cu $\lambda \neq 1$, cercurile corespunzătoare $C_1^{\lambda}(\alpha,\beta)$ şi $C_2^{\mu}(\alpha,\beta)$ sunt ortogonale.

Rezolvare. *a*) Presupunem că $\lambda \neq 1$. Conform [1.8.2 Ex.1], cercul lui Apollonius din enunţ are următoarea ecuaţie carteziană:
$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$ $(r > 0)$,
unde pentru $z = x + iy \in \mathbb{C}$ punct cu proprietatea că $\left|\frac{z-\alpha}{z-\beta}\right| = \lambda$, $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$ şi $\beta = \beta_1 + i\beta_2$ rezultă $z \in C_r(x_0,y_0)$ cu $x_0 = \frac{\alpha_1-\lambda^2\beta_1}{1-\lambda^2}$ şi $y_0 = \frac{\alpha_2-\lambda^2\beta_2}{1-\lambda^2}$. Acest rezultat se obţine din faptul că ecuaţia din enunţ se scrie echivalent sub forma următoare:
$|z-\alpha|^2 = \lambda^2 |z-\beta|^2$,
ceea ce implică
$(x-\alpha_1)^2 + (y-\alpha_2)^2 = \lambda^2 (x-\beta_1)^2 + \lambda^2 (y-\beta_2)^2$,
relaţie care conduce la rezultatul menţionat. Dreapta determinată de punctele distincte $\alpha \neq \beta$ intersectează cercul $C_r(x_0,y_0)$ în două puncte z_1

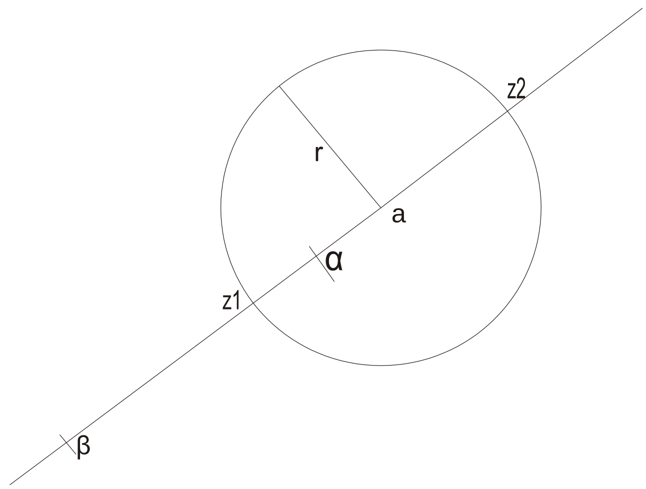

Figure 16: Puncte inverse [1.8.3 Ex. 1 a)]

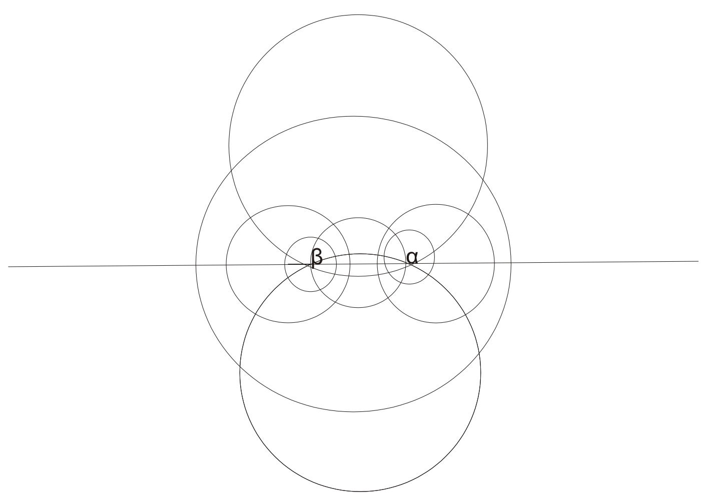

Figure 17: Cercuri coaxiale

şi z_2 care sunt extremităţi ale unui diametru al cercului verificând relaţiile următoare:
$z_1 - \alpha = \lambda (z_1 - \beta)$ şi $z_2 - \alpha = -\lambda (z_2 - \beta)$.
Rezultă că relativ la ecuaţia carteziană a cercului $C_r (x_0, y_0)$ scrisă în forma
$|z - z_0| = r \ (z_0 = x_0 + iy_0)$
avem
$z_0 = \frac{z_1+z_2}{2}$ şi $r = \frac{|z_1-z_2|}{2}$.
deci
$\alpha - z_0 = \frac{1}{2} [(\alpha - z_1) + (\alpha - z_2)] =$
$\frac{1}{2}\lambda [(\beta - z_1) - (\beta - z_2)] =$
$\frac{1}{2}\lambda (z_2 - z_1)$
şi în mod similar
$\lambda (\beta - z_0) = \lambda \frac{1}{2} [(\beta - z_1) + (\beta - z_2)] =$
$\frac{1}{2} [(z_2 - \alpha) - (z_1 - \alpha)] =$
$\frac{1}{2} (z_2 - z_1)$.
Deducem relaţiile următoare:
$(\alpha - z_0) \overline{(\beta - z_0)} =$
$\left[\frac{1}{2}\lambda (z_2 - z_1)\right] \overline{\left[\frac{1}{2\lambda} (z_2 - z_1)\right]} =$
$\frac{1}{4} (z_2 - z_1) \overline{(z_2 - z_1)}$,
ceea ce implică
$(\alpha - z_0) \overline{(\beta - z_0)} = \frac{1}{4} (z_1 - z_2) \overline{(z_1 - z_2)} = r^2$.
Relaţia precedentă exprimă exact faptul că punctele α şi β sunt puncte inverse relativ la cercul lui Apollonius.
Rezolvare b) Conform definiţiei mulţimii $d(\alpha, \beta)$ rezultă
$(\forall z \in \mathbb{C}) [z \in d(\alpha, \beta) \Leftrightarrow |z - \alpha| = |z - \beta|]$,
deci $d(\alpha, \beta)$ este o dreaptă astfel încât $\alpha \notin d(\alpha, \beta)$, $\beta \notin d(\alpha, \beta)$ şi punctele α, β cu $\alpha \neq \beta$ sunt simetrice faţă de această dreaptă.

2. Fie cercul de ecuaţie carteziană $|z - 3| = 2$. Determinaţi o ecuaţie a cercului respectiv $C_2(3)$ de forma $\left|\frac{z-\alpha}{z-\beta}\right| = \lambda$ cu $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Indicaţie. Aplicaţi [1.8.3 Ex.1 *a*)].

3. *a*) Să se demonstreze că punctele $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ sunt inverse relativ la cercul unitate $|z| = 1$ dacă şi numai dacă $\alpha \neq 0$ şi $\beta = \frac{1}{\bar{\alpha}}$. Să se determine $\lambda \in \mathbb{C}$ astfel încât ecuaţia cercului unitate să fie $\left|\frac{z-\alpha}{\bar{\alpha}z-1}\right| = \frac{\lambda}{|\alpha|}$, unde $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.
b) Să se determine centrul şi raza cercului de ecuaţie $\left|\frac{z-1}{z}\right| = \lambda$ ($\lambda > 0$ număr real fixat).
c) Fie $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ cu $\alpha \neq \beta$. Notăm prin $C_1(\alpha, \beta)$ un cerc de ecuaţie
$\left|\frac{z-\alpha}{z-\beta}\right| = \lambda$ şi prin $C_2(\alpha, \beta)$ un cerc de ecuaţie
$\arg\left(\frac{z-\alpha}{z-\beta}\right) = \begin{cases} \mu \\ -(\pi - \mu) \end{cases} \pmod{2\pi}$.
Cercurile $C_1(\alpha, \beta)$ şi $C_2(\alpha, \beta)$ se numesc cercuri coaxiale. Reprezentaţi grafic cu calculatorul 3 perechi de cercuri coaxiale $(C_1(\alpha, \beta), C_2(\alpha, \beta))$

alegând convenabil numerele complexe α şi β. Să se demonstreze că orice pereche de cercuri coaxiale sunt ortogonale.

4. Determinaţi mulţimile de puncte din planul complex definite de fiecare dintre ecuaţiile următoare:
a) $|z+3|=7$, *b*) $|z-2i|=|z+i|$,
c) $|iz+1|=|iz-1|$, *d*) $\left|z-e^{i\frac{\pi}{3}}\right|=|z-1|$.

5. Să se reprezinte grafic mulţimile de puncte din planul complex definite de fiecare din relaţiile următoare:
a) $\operatorname{Im}(z+i)<2$, *b*) $|z-i|<|z-1|$,
c) $|z+i|\geq 3$, *d*) $|z-1+i|\geq|z-1-i|$,
e) $\operatorname{Im}\left(\frac{z+i}{2i}\right)<0$, *f*) $1<\operatorname{Re}z\leq 3$,
g) $\operatorname{Re}z\neq 0$, *h*) $|z-1|<1$ şi $|z|=|z-2|$.

6. Să se reprezinte grafic fiecare din mulţimile următoare de puncte din $\mathbb{C}$:
a) $|z-1-2i|>1$,
b) $|z-i|\neq|z-1|$,
c) $z=|z|e^{i\varphi}$ cu $-\pi<\varphi\leq\frac{\pi}{4}$,
d) $|z-2|>3$ şi $|z|<2$.

7. *a*) Să se determine centrul şi raza pentru fiecare din mulţimile de puncte în $\mathbb{C}$ care sunt cercuri:
1. $|z-3i|=|z+i|$,
2. $|z+1|=4|z-1|$,
3. $|z-i|=2|z|$,
4. $2|z-i|=|z|$.
b) Să se determine pentru fiecare din cercurile următoare o pereche de puncte inverse $(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2$ cu $\alpha\neq\beta$ şi apoi să se expliciteze ecuaţiile cercurilor respective în forma $\left|\frac{z-\alpha}{z-\beta}\right|=\lambda$ ($\lambda>0$ şi $\lambda\neq 1$):
5. $|z-1|=2$,
6. $|z-i|=\sqrt{2}$,
7. $|z-1-i|=2$.

1.9 Transformări Möbius

Definiţia 1. O *transformare Möbius* este o funcţie $f:\overline{\mathbb{C}}\to\overline{\mathbb{C}}$ care are o expresie de forma următoare:

$$\left(\forall z\in\overline{\mathbb{C}}\right) f(z)=\frac{az+b}{cz+d}\ (a,b,c,d\in\mathbb{C} \text{ cu } ad-bc\neq 0).$$

Observaţie 2. Fie $a,b,c,d\in\mathbb{C}$ astfel încât $ad-bc=0$. Sunt posibile următoarele cazuri:

c1) $a=0$ sau $d=0$; în acest caz rezultă $b=0$ sau $c=0$ şi deducem:

- $a=0$ şi $b=0\Rightarrow(c=0$ şi $d=0)$ ($f(z)$ nedefinită, $\forall z\in\overline{\mathbb{C}}$) sau
  ($c\neq 0$ şi $d=0$) ($f(z)=0$, dacă $z\neq 0$ şi $f(0)$ nedefinită) sau
  ($c=0$ şi $d\neq 0$) ($f(z)=0$, dacă $z\neq 0$ şi $f(0)$ nedefinită) sau
  ($c\neq 0$ şi $d\neq 0$) ($f(z)=0$, dacă $z\neq 0$ şi $f(0)$ nedefinită);

- $a = 0$ şi $c = 0 \Rightarrow (b = 0$ şi $d = 0)$ $(f(z)$ nedefinită, $\forall z \in \overline{\mathbb{C}})$ sau
  $(b \neq 0$ şi $d = 0)$ $(f(z) = \infty, \forall z \in \overline{\mathbb{C}})$ sau
  $(b \neq 0$ şi $d \neq 0)$ $(f(z) = \frac{b}{d}, \forall z \in \overline{\mathbb{C}})$;

- $d = 0$ şi $b = 0 \Rightarrow (c = 0$ şi $a = 0)$ $(f(z)$ nedefinită, $\forall z \in \overline{\mathbb{C}})$ sau
  $(c = 0$ şi $a \neq 0)$ $(f(z) = \infty$, dacă $z \neq 0$ şi $f(0)$ nedefinită) sau
  $(c \neq 0$ şi $a = 0)$ $(f(z) = 0$, dacă $z \neq 0$ şi $f(0)$ nedefinită) sau
  $(c \neq 0$ şi $a \neq 0)$ $(f(z) = \frac{a}{c}$, dacă $z \neq 0$ şi $f(0)$ nedefinită);

- $d = 0$ şi $c = 0 \Rightarrow (b = 0$ şi $a = 0)$ $(f(z)$ nedefinită, $\forall z \in \overline{\mathbb{C}})$ sau
  $(b = 0$ şi $a \neq 0)$ $(f(z) = \infty$, dacă $z \neq 0$ şi $f(0)$ nedefinită) sau
  $(b \neq 0$ şi $a = 0)$ $(f(z) = \infty, \forall z \in \overline{\mathbb{C}})$ sau
  $(b \neq 0$ şi $a \neq 0)$ $(f(z)$ nedefinită, $\forall z \in \overline{\mathbb{C}})$;

c2) $a \neq 0$ şi $d \neq 0$; în acest caz rezultă $b \neq 0$ şi $c \neq 0$; din condiţia $ad - bc = 0$ rezultă în plus că sistemul $\begin{cases} az + b & = & 0 \\ cz + d & = & 0 \end{cases}$ are rangul 1 şi este satisfăcută relaţia următoare:

$$d(az + b) - b(cz + d) = 0,$$

deci $az + b = \frac{b}{d}(cz + d)$, ceea ce implică $f(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{b}{d}$, $\forall z \in \overline{\mathbb{C}}$.

Conform celor de mai sus rezultă că $\forall a, b, c, d \in \mathbb{C}$ cu $ad - bc = 0$, expresia $\frac{az+b}{cz+d}$ fie este nedefinită, $\forall z \in \overline{\mathbb{C}}$, fie este definită şi egală cu o constantă pe $\overline{\mathbb{C}} \setminus F$ cu $F \subset \overline{\mathbb{C}}$ mulţime finită. Prin urmare studiul funcţiilor $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ astfel încât $\left(\forall z \in \overline{\mathbb{C}}\right) f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ se reduce la studiul transformărilor Möbius definite conform [1.9 Def.1].

Propoziţia 3. Fie $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4$ numere complexe cu proprietatea
(1) $ad - bc \neq 0$
şi $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ transformarea Möbius corespunzătoare definită prin:
(2) $\left(\forall z \in \overline{\mathbb{C}}\right) f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$.
Sunt îndeplinite condiţiile următoare:
(i) $f\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty$,
(ii) $f(\infty) = \frac{a}{c}$,
(iii) funcţia f este bijectivă cu inversa $g : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ definită prin relaţia:
(3) $\left(\forall w \in \overline{\mathbb{C}}\right) g(w) = \frac{dw-b}{a-cw}$.

Demonstraţie. Condiţiile (i) şi (ii) rezultă din convenţiile de calcul în $\overline{\mathbb{C}}$ [1.7 după Def.2]; într-adevăr, avem

$$f\left(-\frac{d}{c}\right) = \frac{a\left(-\frac{d}{c}\right)+b}{c\left(-\frac{d}{c}\right)+d} = \frac{bc-ad}{0} = \infty,$$

deoarece conform (1) deducem $bc - ad \neq 0$, deci (i) are loc; din (2) rezultă $\left(\forall z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0\}\right) f(z) = \frac{a+\frac{b}{z}}{c+\frac{d}{z}}$ şi $f(0) = \frac{b}{d}$, ceea ce implică $f(\infty) = \frac{a+\frac{b}{\infty}}{c+\frac{d}{\infty}} = \frac{a}{c}$, deci (ii) are loc.

(iii) Fie $z, w \in \overline{\mathbb{C}}$. Conform (1), (2) şi (3) rezultă:

$$f(g(w)) = \frac{ag(w)+b}{cg(w)+d} = \frac{a\frac{dw-b}{a-cw}+b}{c\frac{dw-b}{a-cw}+d} =$$

$$\frac{adw-bcw}{ad-bc} = \frac{(ad-bc)w}{ad-bc} = w,$$

$g(f(z)) = \frac{df(z)-b}{a-cf(z)} = \frac{d\frac{az+b}{cz+d}-b}{a-c\frac{az+b}{cz+d}} =$
$\frac{adz-bcz}{ad-bc} = \frac{(ad-bc)z}{ad-bc} = z.$
Rezultă $f \circ g = g \circ f = id_{\overline{\mathbb{C}}}$, deci $g = f^{-1}$.

Exemple 4. *a*) Fie $\varphi \in \mathbb{R}$ şi $r_\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ rotaţia de unghi φ definită prin condiţia $(\forall z \in \mathbb{C})\, r_\varphi(z) = e^{i\varphi}z$. Atunci r_φ este restricţia la $\mathbb{C}$ a transformării Möbius $\overline{r_\varphi} : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ definite prin

$$\overline{r_\varphi}(z) = \begin{cases} r_\varphi(z), & \text{dacă} \quad z \in \mathbb{C} \\ \infty & \text{dacă} \quad z = \infty \end{cases},$$

adică $\overline{r_\varphi}(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ cu $a = e^{i\varphi}, b = c = 0$ şi $d = 1$.

b) Fie $\lambda \in \mathbb{R}$ cu $\lambda > 0$ şi $o_\lambda : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ omotetia de factor λ definită prin condiţia $(\forall z \in \mathbb{C})\, o_\lambda(z) = \lambda z$. Atunci o_λ este restricţia la $\mathbb{C}$ a transformării Möbius $\overline{o_\lambda} : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ definite prin

$$\overline{o_\lambda}(z) = \begin{cases} o_\lambda(z), & \text{dacă} \quad z \in \mathbb{C} \\ \infty & \text{dacă} \quad z = \infty \end{cases},$$

adică $\overline{o_\lambda}(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ cu $a = \lambda, b = c = 0$ şi $d = 1$.

c) Fie $\alpha \in \mathbb{C}$ şi $t_\alpha : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ translaţia de vector α definită prin

$$(\forall z \in \mathbb{C})\, t_\alpha(z) = z + \alpha.$$

Atunci t_α este restricţia la $\mathbb{C}$ a transformării Möbius $\overline{t_\alpha} : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ definite prin

$$\overline{t_\alpha}(z) = \begin{cases} t_\alpha(z), & \text{dacă} \quad z \in \mathbb{C} \\ \infty & \text{dacă} \quad z = \infty \end{cases},$$

adică $\overline{t_\alpha}(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ cu $a = 1, b = \alpha, c = 0$ şi $d = 1$.

d) Fie operaţia de inversare pe $\mathbb{C} \setminus \{0\} = \mathbb{C}^*$, ${}^{-1} : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ definită prin

$$(\forall z \in \mathbb{C}^*)\, z^{-1} = \tfrac{1}{z}.$$

Atunci ${}^{-1}$ este restricţia la $\mathbb{C}^*$ a transformării Möbius $\overline{{}^{-1}} : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ definite prin

$$\overline{{}^{-1}}(z) = \begin{cases} \frac{1}{z}, & \text{dacă} \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ \infty, & \text{dacă} \quad z = 0 \\ 0 & \text{dacă} \quad z = \infty \end{cases},$$

adică $\overline{{}^{-1}}(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ cu $a = 0, b = 1, c = 1$ şi $d = 0$.

Teorema 5. Fie $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ cu $\alpha \neq \beta$ şi $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ cu $\lambda \neq 1$. Considerăm cercul Apollonius $C_\lambda(\alpha, \beta)$ de puncte inverse α şi β,

$$C_\lambda(\alpha, \beta) = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| \frac{z-\alpha}{z-\beta} \right| = \lambda \right\}.$$

Definim $\overline{C_\lambda(\alpha, \beta)} = C_\lambda(\alpha, \beta) \cup \{\infty\}$. Pentru orice transformare Möbius $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$, imaginea prin f a lui $\overline{C_\lambda(\alpha, \beta)}$ dată prin

$$f\left(\overline{C_\lambda(\alpha, \beta)}\right) = \{f(z) : z \in C_\lambda(\alpha, \beta)\} \cup \{f(\infty)\}$$

este un cerc Apollonius de puncte inverse $f(\alpha)$ şi $f(\beta)$ reunit cu punctul ∞.

Demonstraţie. Fie $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ o transformare Möbius definită prin

$$\left(\forall z \in \overline{\mathbb{C}}\right) f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \text{ (cu } a, b, c, d \in \mathbb{C} \text{ şi } ad - bc \neq 0).$$

Fie $w = f(z) \in f\left(\overline{C_\lambda(\alpha, \beta)}\right)$ cu $z \in \overline{C_\lambda(\alpha, \beta)}$. Rezultă $z = \frac{dw-b}{a-cw}$ şi $\left| \frac{z-\alpha}{z-\beta} \right| = \lambda$, deci
$\left| \frac{\frac{dw-b}{a-cw} - \alpha}{\frac{dw-b}{a-cw} - \beta} \right| = \lambda$. Obţinem relaţia $\left| \frac{(\alpha c+d)w-(\alpha a+b)}{(\beta c+d)w-(\beta a+b)} \right| = \lambda$, de unde deducem:

(1) $\left|\frac{w-f(\alpha)}{w-f(\beta)}\right| = \lambda$, dacă $\alpha c + d \neq 0$ şi $(\beta c + d) \neq 0$;

(2) $|w - f(\alpha)| = \lambda \left|\frac{\beta a+d}{\alpha c+d}\right|$, dacă $\alpha c + d \neq 0$ şi $\beta c + d = 0$;

(3) $|w - f(\beta)| = \lambda \left|\frac{\alpha a+b}{\beta c+d}\right|$, dacă $\alpha c + d = 0$ şi $\beta c + d \neq 0$.

Cazul $\alpha c + d = 0$ şi $\beta c + d = 0$ este exclus deoarece în acest caz rezultă

$0 = \alpha c + d = \beta c + d$, deci $(\alpha - \beta)\, c = 0$,

ceea ce implică

$c = 0$ (deoarece $\alpha \neq \beta$) şi $d = 0$ (deoarece $0 = \alpha c + d = \alpha 0 + d = d$),

de unde rezultă $ad - bc = 0$, dar $ad - bc \neq 0$, contradicţie.

În cazul (1) deducem $f\left(\overline{C_\lambda(\alpha,\beta)}\right) = C_\lambda(f(\alpha), f(\beta)) \cup \{\infty\}$.

În cazurile (2) şi (3) rezultă că mulţimile imagine $f\left(\overline{C_\lambda(\alpha,\beta)}\right)$ sunt definite respectiv prin cercurile Apollonius de centre $f(\alpha)$ şi $f(\beta)$ reunite cu punctul ∞ având respectiv razele $\lambda\left|\frac{\beta a+d}{\alpha c+d}\right|$ şi $\lambda\left|\frac{\alpha a+b}{\beta c+d}\right|$.

Aplicaţie 6. Utilizând metoda de demonstraţie din [1.9 Teor. 5] prin care s-a determinat imaginea printr-o transformare Möbius a unui cerc Apollonius, deducem o metodă corespunzătoare de determinare a imaginii $f(S) \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ a unei mulţimi oarecare $S \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ printr-o funcţie injectivă $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$, nu neapărat o transformare Möbius. Fie $S \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ şi $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ o funcţie injectivă. Urmărim să determinăm mulţimea imagine $f(S) = \{f(z) : z \in S\}$. Pentru a realiza aceasta, fie $f^{-1} : f(S) \to S$ inversa lui $f : S \to f(S)$ şi fie $w = f(z) \in f(S)$ cu $z \in S$. Obţinem relaţia care caracterizează condiţia $w \in f(S)$ cu metoda următoare numită *metoda substituţiei*: în relaţia care caracterizează condiţia $z \in S$ se substituie variabila z cu expresia ei în funcţie de w, $z = f^{-1}(w)$, din care se deduce relaţia căutată depinzând de variabila w.

Exemple 7. Fie $S = \mathcal{R} \cup \{\infty\}$, $T = C_1(0) \cup \{\infty\}$, $U = \{z : \operatorname{Re} z = 1\} \cup \{\infty\}$ şi $V = C_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right) \cup \{\infty\}$. Atunci:

1) $f(S) \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ este definită de:

a) $\mathcal{I} \cup \{\infty\}$, dacă $w = f(z) = e^{i\frac{\pi}{2}} z, \forall z \in \mathbb{C}$ şi $\infty = f(\infty)$,

b) $\{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} w = 1\} \cup \{\infty\}$, dacă $w = f(z) = z + i, \forall z \in \mathbb{C}$ şi $\infty = f(\infty)$.

2) $f(T) \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ este definită de:

c) $C_2(0) \cup \{\infty\}$, dacă $w = f(z) = 2z, \forall z \in \mathbb{C}$ şi $\infty = f(\infty)$,

d) $C_1(1) \cup \{\infty\}$, dacă $w = f(z) = z + 1, \forall z \in \mathbb{C}$ şi $\infty = f(\infty)$.

3) $f(U) \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ este definită de:

e) $C_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right) \cup \{\infty\} = V$, dacă $w = f(z) = \frac{1}{z}, \forall z \in \overline{\mathbb{C}}$.

4) $f(V) \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ este definită de:

f) $\{z : \operatorname{Re} z = 1\} \cup \{\infty\} = U$, dacă $w = f(z) = \frac{1}{z}, \forall z \in \overline{\mathbb{C}}$.

5) $f(\mathcal{I} \cup \{\infty\}) = C_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right) \cup \{\infty\} = V$, dacă $w = f(z) = \frac{1}{z-1}, \forall z \in \overline{\mathbb{C}}$.

6) $f(\mathcal{R} \cup \{\infty\}) = \mathcal{R} \cup \{\infty\}$, dacă $w = f(z) = \frac{1}{z-1}, \forall z \in \overline{\mathbb{C}}$.

7) $f(C_r(0) \cup \{\infty\}) = \left\{w \in \overline{\mathbb{C}} : \left|\frac{w+1}{w}\right| = r\right\}$ (dreaptă, pentru $r = 1$; cerc, pentru $r \neq 1$), dacă $w = f(z) = \frac{1}{z-1}, \forall z \in \overline{\mathbb{C}}$.

Observaţie 8. Orice dreaptă $d(\alpha, \beta) \subset \mathbb{C}$ de ecuaţie $\left|\frac{z-\alpha}{z-\beta}\right| = 1$ este unic determinată de perechea de puncte distincte $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ $(\alpha \neq \beta)$. Orice triplet $(\alpha, \beta, \lambda) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{R}$ cu $\alpha \neq \beta, \lambda > 0$ şi $\lambda \neq 1$ determină un unic cerc Apollonius $C_\lambda(\alpha, \beta)$ de ecuaţie $\left|\frac{z-\alpha}{z-\beta}\right| = \lambda$. Tripletele de puncte distincte $(p, q, r) \in \overline{\mathbb{C}}^3$ $(p \neq q, q \neq r$ şi $r \neq p)$ sunt utile în construcţia transformărilor Möbius.

Propoziţia 9. Fie $(z_1, z_2, z_3) \in \overline{\mathbb{C}}^3$ şi $(w_1, w_2, w_3) \in \overline{\mathbb{C}}^3$ triplete oarecare de puncte distincte în $\overline{\mathbb{C}}$. Atunci există o unică transformare Möbius $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ cu proprietatea următoare:

(T) $f(z_j) = w_j, \forall j = 1, 2, 3.$

Demonstraţie. Definim funcţia $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ prin relaţia următoare:
(T*) $\left(\forall z \in \overline{\mathbb{C}}\right) f(z) = w$ astfel încât $\left(\frac{w-w_1}{w-w_3}\right)\left(\frac{w_2-w_3}{w_2-w_1}\right) = \left(\frac{z-z_1}{z-z_3}\right)\left(\frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}\right).$
Atunci f este o transformare Möbius verificând condiţia (T). Se verifică în plus faptul că o transformare Möbius $w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \forall z \in \overline{\mathbb{C}}$ $(a, b, c, d \in \mathbb{C}$ cu $ad - bc \neq 0)$ satisface (T) dacă şi numai dacă f satisface (T*). Unicitatea rezultă din faptul că unica transformare Möbius f care transformă punctele $0, 1, \infty$ respectiv în $0, 1, \infty$ este funcţia identitate $f = id : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$.

Observaţii 10. Funcţia $g : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ cu $g(z) = \left(\frac{z-z_1}{z-z_3}\right)\left(\frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}\right), \forall z \in \overline{\mathbb{C}}$ este o transformare Möbius care transformă punctele z_1, z_2, z_3 respectiv în punctele $0, 1, \infty$. Analog funcţia $h : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ cu $h(w) = \left(\frac{w-w_1}{w-w_3}\right)\left(\frac{w_2-w_3}{w_2-w_1}\right), \forall w \in \overline{\mathbb{C}}$ este o transformare Möbius care transformă punctele w_1, w_2, w_3 respectiv în punctele $0, 1, \infty$. Atunci funcţia compusă $f = h^{-1} \circ g : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ este o transformare Möbius care transformă punctul z_j în w_j, pentru $j = 1, 2, 3$, deci funcţia f satisface condiţiile (T) şi (T*) din [1.9 Prop. 9].

2 FUNCŢII COMPLEXE DE O VARIABILĂ COMPLEXĂ

2.1 Definiţii şi exemple.

Definiţia 1. O *funcţie complexă de o variabilă complexă* este o funcţie $f : D \to \mathbb{C}$ cu valori în $\mathbb{C}$ având domeniul de definiţie o mulţime nevidă de numere complexe $D \subseteq \mathbb{C}$.

Consecinţa 2. Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ cu $D \neq \emptyset$ şi $f : D \to \mathbb{C}$ o funcţie complexă de o variabilă complexă. Atunci există o pereche unică (u, v) de funcţii reale de două variabile reale $u, v : D \to \mathbb{R}$ verificând relaţia următoare:

(1) $f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \forall z = x + iy \in D.$

Notăm $\operatorname{Re} f = u$ şi $\operatorname{Im} f = v$ respectiv funcţiile $u : D \to \mathbb{R}$ şi $v : D \to \mathbb{R}$ care verifică (1). Funcţia $\operatorname{Re} f = u$ se numeşte *partea reală* a lui f şi funcţia $\operatorname{Im} f = v$ se numeşte *partea imaginară* a lui f. În condiţiile (1), convenim să scriem prescurtat

(1*) $f = u + iv : D \to \mathbb{C}.$

Au loc relaţiile:

(1.1) $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z), \forall z = x + iy \in D;$

(1.2) $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z), \forall z = x + iy \in D$.

Definiţia 3. Fie $n \in \mathbb{N}$ şi $\mathbb{R}^n$ spaţiul aritmetic real n-dimensional. O *funcţie complexă de n variabile reale* este o funcţie $\varphi : D \to \mathbb{C}$ cu valori în $\mathbb{C}$ având domeniul de definiţie o mulţime nevidă de puncte $D \subseteq \mathbb{R}^n$.

Consecinţa 4. Fie $n \in \mathbb{N}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ cu $D \neq \emptyset$ şi $\varphi : D \to \mathbb{C}$ o funcţie complexă de n variabile reale. Atunci există o pereche unică (P, Q) de funcţii reale de n variabile reale $P, Q : D \to \mathbb{R}$ verificând relaţia următoare:

(2) $\varphi(x) = P(x) + iQ(x), \forall x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in D$.

Notăm $\operatorname{Re} \varphi = P$ şi $\operatorname{Im} \varphi = Q$ respectiv funcţiile $P : D \to \mathbb{R}$ şi $Q : D \to \mathbb{R}$ care verifică (2). Funcţia $\operatorname{Re} \varphi = P$ se numeşte *partea reală* a lui φ şi funcţia $\operatorname{Im} \varphi = Q$ se numeşte *partea imaginară* a lui φ. În condiţiile (2), convenim să scriem prescurtat

(2*) $\varphi = P + iQ : D \to \mathbb{C}$.

Au loc relaţiile:

(2.1) $P(x) = \operatorname{Re} \varphi(x), \forall x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in D$;

(2.2) $Q(x) = \operatorname{Im} \varphi(x), \forall x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in D$.

Observaţie 5. Fie $D \subseteq \mathbb{R}$ cu $D \neq \emptyset$ şi $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie reală de o variabilă reală. Atunci f poate fi considerată o funcţie complexă de o variabilă complexă cu domeniul de definiţie inclus în $\mathcal{R}$ şi cu valori în $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{C}$.

Exemplu 6. Fie $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. O *funcţie polinomială analitică de grad n* este o funcţie $P_n[a] : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definită astfel, pentru orice $z \in \mathbb{C}$:

$$P_n[a](z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + ... + a_n,$$

unde $a = (a_0, a_1, ..., a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ este un şir finit de numere complexe cu $a_0 \neq 0$.

Cazuri particulare.

1) Fie $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. *Funcţia putere de grad n* este o funcţie polinomială analitică de grad n notată prin $p_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ şi care este definită prin relaţia următoare:

$$p_n(z) = z^n, \forall z \in \mathbb{C}.$$

Deci $p_n = P_n[e_1]$, unde $e_1 = (1, 0, ..., 0) \in \mathbb{C}^{n+1}$.

2) Fie $a \in \mathbb{C}$ un număr complex fixat. *Translaţia determinată de a* este o funcţie polinomială analitică de grad 1 notată prin $t_a : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ şi care este definită prin relaţia următoare:

$$t_a(z) = z + a, \forall z \in \mathbb{C}.$$

Deci $t_a = P_1[e_1 + ae_2]$, unde $e_1 = (1, 0) \in \mathbb{C}^2$ şi $e_2 = (0, 1) \in \mathbb{C}^2$.

3) *Omotetia* determinată de un număr $a \in \mathbb{C}$ este o funcţie polinomială analitică de grad 1 notată prin $o_a : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ şi care este definită prin relaţia următoare:

$$o_a(z) = az, \forall z \in \mathbb{C} \text{ (a se vedea Fig.6).}$$

Deci $o_a = P_1[ae_1]$, unde $e_1 = (1, 0) \in \mathbb{C}^2$. În particular, pentru numărul complex a de forma următoare:

$$a = e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta \in \mathbb{C} \text{ cu } \theta \in \mathbb{R},$$

omotetia o_a determinată de a reprezintă *rotaţia* determinată de unghiul $\theta \in \mathbb{R}$ care se notează prin $r_\theta : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, deci $r_\theta = o_{e^{i\theta}}$, ceea ce implică

$$r_\theta(z) = e^{i\theta} z, \forall z \in \mathbb{C}.$$

Exemplu 7. Fie $(n,m) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^2$. O *funcţie raţională analitică* este o funcţie complexă $R_{(n,m)}[a,b] : D \to \mathbb{C}$ corespunzătoare unei perechi de funcţii polinomiale analitice $(P_n[a], Q_m[b])$ astfel încât

$R_{(n,m)}[a,b](z) = \dfrac{P_n[a](z)}{Q_m[b](z)}, \forall z \in D = \{z \in \mathbb{C} : Q_m[b](z) \neq 0\}$,

unde $a = (a_0, a_1, ..., a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ şi $b = (b_0, b_1, ..., b_m) \in \mathbb{C}^{m+1}$, cu $a_0 \neq 0$ şi $b_0 \neq 0$. Rezultă că au loc relaţiile următoare:

$$z \in D \Leftrightarrow z \in \mathbb{C} \text{ şi } b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + ... + b_m \neq 0;$$
$$R_{(n,m)}[a,b](z) = \tfrac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + ... + a_n}{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + ... + b_m}, \forall z \in D.$$

Exemplu 8. *Funcţia exponenţială complexă* este funcţia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definită prin relaţia următoare:

$$f(z) = e^z, \forall z \in \mathbb{C},$$

unde

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y), \forall z = x + iy \in \mathbb{C},$$

cu $e^x, \cos y$ şi $\sin y$ reprezentând valorile funcţiilor *exponenţială reală*, *cosinus real* şi *sinus real* de la $\mathbb{R}$ în $\mathbb{R}$.

Exemplu 9. *Funcţia sinus complex* este funcţia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definită prin relaţia următoare:

$$f(z) = \sin z, \forall z \in \mathbb{C}$$

unde

$$\sin z = \tfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \forall z \in \mathbb{C}.$$

Exemplu 10. *Funcţia cosinus complex* este funcţia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definită prin relaţia următoare:

$$f(z) = \cos z, \forall z \in \mathbb{C}$$

unde

$$\cos z = \tfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \forall z \in \mathbb{C}.$$

Exemplu 11. *Funcţia sinus hiperbolic complex* este funcţia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definită prin relaţia următoare:

$$f(z) = \sinh z, \forall z \in \mathbb{C},$$

unde

$$\sinh z = \tfrac{e^z - e^{-z}}{2}, \forall z \in \mathbb{C}.$$

Exemplu 12. Funcţia *cosinus hiperbolic complex* este funcţia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definită prin relaţia următoare:

$$f(z) = \cosh z, \forall z \in \mathbb{C},$$

unde

$$\cosh z = \tfrac{e^z + e^{-z}}{2}, \forall z \in \mathbb{C}.$$

2.2 Şiruri în $\mathbb{C}$

Fie $(\overline{\mathbb{C}}, q)$ planul complex extins, unde q este distanţa sferică [1.7 Def. 2].

Definiţia 1. Un şir de numere complexe $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se numeşte *convergent în* $(\overline{\mathbb{C}}, q)$ dacă există $\alpha \in \overline{\mathbb{C}}$ astfel încât $(\forall \varepsilon > 0)(\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N})(\forall n \geq N_\varepsilon) q(z_n, \alpha) < \varepsilon$ şi în acest caz notăm $\alpha = \lim\limits_{n \to +\infty} z_n$ sau $z_n \to \alpha$ şi numim α limita şirului $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Definiţia 2. Un şir de numere complexe $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se numeşte *şir Cauchy* dacă verifică următoarea condiţie:

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N})(\forall m \geq N_\varepsilon)(\forall n \geq N_\varepsilon)\, |z_n - z_m| < \varepsilon.$$

Propoziţia 3. Fie $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de numere complexe în forma algebrică cu

$$z_n = x_n + iy_n \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}$$

şi $z = x + iy \in \mathbb{C}$ un număr complex. Sunt îndeplinite condiţiile următoare:

(i) $z_n \to z$ dacă şi numai dacă $(\forall\varepsilon > 0)(\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N})(\forall n \geq N_\varepsilon)\, |z_n - z| < \varepsilon$.

(ii) $z_n \to \infty$ dacă şi numai dacă $(\forall\rho > 0)(\exists N_\rho \in \mathbb{N})(\forall n \geq N_\rho)\, |z_n| > \rho$.

(iii) dacă $z_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ atunci $z_n \to \infty \Leftrightarrow \dfrac{1}{z_n} \to 0$.

(iv) $z_n \to z$ implică $(\exists r > 0)(\forall n \in \mathbb{N})\, |z_n| \leq r$, deci orice şir convergent $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cu limita în $\mathbb{C}$ este mărginit.

(v) $z_n \to z \Leftrightarrow x_n \to x$ şi $y_n \to y \Leftrightarrow \operatorname{Re} z_n \to \operatorname{Re} z$ şi $\operatorname{Im} z_n \to \operatorname{Im} z$.

(vi) $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir Cauchy dacă şi numai dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sunt şiruri Cauchy.

(vii) $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir Cauchy dacă şi numai dacă există $\alpha \in \mathbb{C}$ astfel încât $\alpha = \lim\limits_{n\to+\infty} z_n$.

2.3 Limite de funcţii. Funcţii continue

Definiţia 1. Fie $f = u + iv : D \to \mathbb{C}$ cu $D \subseteq \mathbb{C}$, $a \in D'$ un punct de acumulare pentru D în $(\overline{\mathbb{C}}, q)$ şi $\lambda \in \overline{\mathbb{C}}$. Funcţia f are limita λ în a dacă pentru orice număr real $\varepsilon > 0$ există un număr real $\delta > 0$ astfel încât

$$f\left(D \cap (Q_\delta(a) \setminus \{a\})\right) \subseteq Q_\varepsilon(\lambda).$$

Notăm

$$\lambda = \lim_{z\to a} f(z)$$

dacă funcţia f are limita λ în a.

Definiţia 2. Fie $f = u + iv : D \to \mathbb{C}$ cu $D \subseteq \mathbb{C}$ şi $a \in D$. Funcţia f se numeşte continuă în punctul a dacă $a \notin D'$ sau $a \in D'$ şi $f(a) = \lim\limits_{z\to a} f(z)$. Funcţia f se numeşte continuă pe D dacă $(\forall a \in D)$ f este continuă în a.

Propoziţia 3. Fie $f = u+iv : D \to \mathbb{C}$ o funcţie complexă cu $D \subseteq \mathbb{C}$, $a \in D'$ un punct de acumulare pentru D în $(\overline{\mathbb{C}}, q)$ şi $\lambda \in \overline{\mathbb{C}}$. Sunt îndeplinite condiţiile următoare:

(i) Dacă $a, \lambda \in \mathbb{C}$ atunci

$\lambda = \lim\limits_{z\to a} f(z) \Leftrightarrow$ pentru orice număr real $\varepsilon > 0$ există un număr real $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât din $z \in D, z \neq a$ şi $|z - a| < \delta(\varepsilon)$ rezultă $|f(z) - \lambda| < \varepsilon$.

(ii) Dacă $a \in \mathbb{C}$ atunci

$\infty = \lim\limits_{z\to a} f(z) \Leftrightarrow$ pentru orice număr real $r > 0$ există un număr real $\delta(r) > 0$ astfel încât din $z \in D, z \neq a$ şi $|z - a| < \delta(r)$ rezultă $|f(z)| > r$.

(iii) Dacă $\lambda \in \mathbb{C}$ atunci

$\lambda = \lim\limits_{z\to\infty} f(z) \Leftrightarrow$ pentru orice număr real $\varepsilon > 0$ există un număr real $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât din $z \in D$ şi $|z| > \delta(\varepsilon)$ rezultă $|f(z) - \lambda| < \varepsilon$.

(iv) $\infty = \lim\limits_{z\to\infty} f(z) \Leftrightarrow$ pentru orice număr real $r > 0$ există un număr real $\delta(r) > 0$ astfel încât din $z \in D$ şi $|z| > \delta(r)$ rezultă $|f(z)| > r$.

(v) Dacă $a = a_1 + ia_2 \in \mathbb{C}$ şi $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2 \in \mathbb{C}$ atunci
$\lambda = \lim\limits_{z\to a} f(z) \Leftrightarrow \lambda_1 = \lim\limits_{(x,y)\to(a_1,a_2)} u(x,y)$ şi $\lambda_2 = \lim\limits_{(x,y)\to(a_1,a_2)} v(x,y)$.

(vi) Funcţia complexă f este continuă în $a = a_1 + ia_2 = (a_1, a_2) \in D$ dacă şi numai dacă funcţiile reale $u : D \to \mathbb{R}$ şi $v : D \to \mathbb{R}$ sunt continue în a.

(vii) Funcţia complexă f este continuă pe D dacă şi numai dacă funcţiile reale $u : D \to \mathbb{R}$ şi $v : D \to \mathbb{R}$ sunt continue pe D.

2.4 Funcţia argument

Definiţia 1. *Funcţia argument* este o funcţie $Arg : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathcal{P}(\mathbb{C})$ definită pentru orice $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ prin mulţimea $Arg\,(z)$ a tuturor argumentelor lui z, deci conform [1.4 Cons. 12 (ii)]

$$(\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\})\; Arg\,(z) = \{\arg z + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Definiţia 2. *Determinarea principală a funcţiei argument* este o funcţie $\arg : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ de la mulţimea numerelor complexe nenule în $\mathbb{R}$ definită prin corespondenţa următoare:

$$(\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\})\; z \mapsto \arg z \in Arg\,(z),$$

unde $\arg z$ este un număr real cu $\arg z = \varphi \in (-\pi, \pi]$ reprezentând valoarea principală a argumentului numărului complex nenul z definită prin [1.4 Def. 11] şi care se calculează conform [1.4 Cons. 12 (i)].

Pentru orice număr complex nenul z, următoarea propoziţie explicitează o regulă alternativă de calcul a valorii $\arg z$ pe baza formei algebrice $z = x + iy$. Aceasta permite determinarea puterilor z^m $(m \in \mathbb{N})$ necesare în diverse aplicaţii.

Propoziţia 3. Fie $z = x + iy \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Au loc relaţiile următoare:

(i) $\arg z = \begin{cases} 2\arctan\left(\frac{y}{x+|z|}\right), & \text{dacă } x + |z| \neq 0 \\ \pi & , \text{dacă } x + |z| = 0 \end{cases}$;

(ii) $z = |z|\, e^{i \arg z} = |z|\,(\cos \arg z + i \sin \arg z)$ (forma polară principală);

(iii) pentru orice $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, puterea algebrică a lui z de exponent întreg nenegativ m se calculează cu formulele următoare:
$z^m = \left(|z|\, e^{i \arg z}\right)^m = |z|^m\, e^{im \arg z} = |z|^m\, [\cos\,(m \arg z) + i \sin\,(m \arg z)]$.

2.5 Logaritmul natural complex

Definiţia 1. *Funcţia logaritm natural complex* este o funcţie

$$Ln : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathcal{P}\,(\mathbb{C})$$

definită prin condiţia următoare:

$$(\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\})\; w \in Ln\,(z) \Leftrightarrow e^w = z.$$

Propoziţia 2. Fie $z = x + iy \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Atunci

$$Ln\,(z) = \{\ln |z| + i(\arg z + 2k\pi) : k \in \mathbb{Z}\},$$

unde $\ln |z|$ este logaritmul natural real al numărului real pozitiv $|z| > 0$.

Definiţia 3. *Determinarea principală a logaritmului natural complex* este funcţia complexă $ln : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, definită prin condiţia următoare:

$(\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\})\, ln\,(z) = \ln|z| + i \arg z.$

Exerciţiu. Să se determine mulţimile de numere complexe $Ln\,(1)\,, Ln\,(-1)$ şi $Ln\,(1-i)$ împreună cu determinările principale corespunzătoare $ln\,(1)\,, ln\,(-1)$ şi $ln\,(1-i)$.

Rezolvare. Din [2.5. Prop. 2] deducem:
$Ln\,(1) = \{2k\pi i : k \in \mathbb{Z}\}$ şi $ln\,(1) = 0,$
$Ln(-1) = \{(2k+1)\pi i : k \in \mathbb{Z}\}$ şi $ln\,(-1) = \pi i,$
$Ln(1-i) = \left\{\ln\sqrt{2} + i\left(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) : k \in \mathbb{Z}\right\}$ şi $ln(1-i) = \ln\sqrt{2} - i\frac{\pi}{4}.$

2.6 Puteri complexe generale

Definiţia 1. Fie $\alpha \in \mathbb{C}$ şi $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Definim $z^\alpha \subseteq \mathbb{C}$ prin relaţia:
(1) $z^\alpha = e^{\alpha Ln(z)} = \{e^{\alpha w} : w \in Ln\,(z)\}\,,$
şi numim z^α *mulţimea putere complexă de exponent* α *a lui* z.

Definiţia 2. *Funcţia putere complexă de exponent* $\alpha \in \mathbb{C}$ este o funcţie $p_\alpha : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathcal{P}\,(\mathbb{C})$ definită prin relaţia următoare:
(2) $(\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\})\, p_\alpha(z) = z^\alpha$ [2.6 Def. 1. (1)].

Propoziţia 3. Pentru orice $z = x + iy \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ şi $\alpha \in \mathbb{C}$, sunt îndeplinite condiţiile următoare:
(i) $z^\alpha = \left\{e^{\alpha[\ln|z| + i(\arg z + 2k\pi)]} : k \in \mathbb{Z}\right\};$
(ii) dacă $n \in \mathbb{N}$ şi $\alpha = \frac{1}{n}$ atunci $z^\alpha = \sqrt[n]{z}$, unde
(3) $\sqrt[n]{z} = \left\{\sqrt[n]{|z|}\left[\cos\varphi\,(z,k,n) + i\sin\varphi\,(z,k,n)\right] : k = \overline{0, n-1}\right\}$
cu $\varphi\,(z,k,n) = \frac{\arg z + 2k\pi}{n};$
(iii) dacă $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}\,, n \in \mathbb{N}$ şi $\alpha = \frac{m}{n}$ atunci $z^\alpha = \sqrt[n]{z^m}$, unde
(4) $\sqrt[n]{z^m} = \left\{\sqrt[n]{|z|^m}\left[\cos\left(m\varphi\,(z,k,n)\right) + i\sin\left(m\varphi\,(z,k,n)\right)\right] : k = \overline{0, n-1}\right\};$
în particular, pentru $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ şi $n = 1$, din relaţia (2) deducem că mulţimea putere complexă $z^\alpha = z^{\frac{m}{1}}$ de exponent $\alpha = \frac{m}{1}$ se identifică cu puterea complexă algebrică de grad m:
(5) $z^\alpha = z^{\frac{m}{1}} = \sqrt[1]{z^m} = \{|z|^m\left[\cos\left(m\arg z\right) + i\sin\left(m\arg z\right)\right]\} = \{z^m\},$
deoarece $z = |z|\, e^{i\arg z}$.

Exerciţiu. Să se calculeze mulţimile putere complexă $(-1)^i$ şi i^i.

Rezolvare. Definiţiile şi proprietăţile precedente furnizează reguli concrete de calcul cu puteri complexe. Pentru mulţimile putere $(-1)^i$ şi i^i obţinem:
(6) $(-1)^i = e^{(-1)\ln i} = \left\{e^{-(2k+1)\pi} : k \in \mathbb{Z}\right\} \subseteq \mathbb{R};$
(7) $i^i = e^{i\ln i} = \left\{e^{-(4k+1)\frac{\pi}{2}} : k \in \mathbb{Z}\right\} \subseteq \mathbb{R}.$

2.7 Funcţii trigonometrice

Funcţiile trigonometrice complexe sunt funcţiile sinus şi cosinus definite în [2.1 Ex.9 şi Ex. 10] împreună cu funcţiile tangentă şi cotangentă pe care le definim în continuare.

Definiţia 1. Funcţia tangentă este funcţia $f : Dom(\tan) \to \mathbb{C}$ definită prin relaţia

$$f(z) = \tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \forall z \in Dom(\tan) = \mathbb{C} \setminus Zero(\cos),$$

unde

$$Zero(\cos) = \{z \in \mathbb{C} : \cos z = 0\} = \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Definiţia 2. Funcţia cotangentă este funcţia $f : Dom(\cot) \to \mathbb{C}$ definită prin relaţia

$$f(z) = \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}, \forall z \in Dom(\cot) = \mathbb{C} \setminus Zero(\sin),$$

unde

$$Zero(\sin) = \{z \in \mathbb{C} : \sin z = 0\} = \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

În propoziţia următoare, se prezintă reguli de inversare a funcţiilor trigonometrice care se obţin din definiţiile date anterior utilizând funcţiile complexe logaritm natural şi radical de ordinul al doilea.

Propoziţia 3. Fie $z \in \mathbb{C}$. Definim mulţimile

$$Arc\sin z = \{w \in \mathbb{C} : \sin w = z\},$$
$$Arc\cos z = \{w \in \mathbb{C} : \cos w = z\},$$
$$Arc\tan z = \{w \in \mathbb{C} : \tan w = z\},$$
$$Arc\cot z = \{w \in \mathbb{C} : \cot w = z\}.$$

Au loc relaţiile:

(i) $Arc\sin z = -iLn\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right)$,

(ii) $Arc\cos z = -iLn\left(z + \sqrt{z^2-1}\right)$,

(iii) $Arc\tan z = -\frac{i}{2}Ln\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)$, pentru $z \notin \{-i, i\}$,

(iv) $Arc\cot z = -\frac{i}{2}Ln\left(\frac{z+i}{z-i}\right)$, pentru $z \notin \{-i, i\}$.

2.8 Funcţii hiperbolice

Funcţiile hiperbolice complexe sunt funcţiile definite în [2.1 Ex.11 şi Ex. 12] numite sinus hiperbolic şi cosinus hiperbolic împreună cu funcţiile tangentă hiperbolică şi cotangentă hiperbolică pe care le definim în continuare.

Definiţia 1. Funcţia tangentă hiperbolică este funcţia $f : Dom(\tanh) \to \mathbb{C}$ definită prin relaţia

$$f(z) = \tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}, \forall z \in Dom(\tanh) = \mathbb{C} \setminus Zero(\cosh),$$

unde

$$Zero(\cosh) = \{z \in \mathbb{C} : \cosh z = 0\} = \frac{1}{2}\ln(-1).$$

Funcţia cotangentă hiperbolică este funcţia $f : Dom(\coth) \to \mathbb{C}$ definită prin

$$f(z) = \coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z}, \forall z \in Dom(\coth) = \mathbb{C} \setminus Zero(\sinh),$$

unde

$$Zero(\sinh) = \{z \in \mathbb{C} : \sinh z = 0\} = \frac{1}{2}\ln 1.$$

Observaţie 2. Funcţiile hiperbolice se pot exprima cu ajutorul funcţiilor trigonometrice pe baza relaţiilor următoare, pentru orice $z \in \mathbb{C}$:

(1) $\sinh z = -i\sin(iz)$,

(2) $\cosh z = \cos(iz)$.

Propoziţia următoare furnizează reguli de inversare a funcţiilor hiperbolice.

Propoziţia 3. Fie $z \in \mathbb{C}$. Definim mulţimile

$$Arc\sinh\ z = \{w \in \mathbb{C} : \sinh w = z\},$$
$$Arc\cosh\ z = \{w \in \mathbb{C} : \cosh w = z\},$$
$$Arc\tanh\ z = \{w \in \mathbb{C} : \tanh\ w = z\},$$
$$Arc\coth\ z = \{w \in \mathbb{C} : \coth\ w = z\}.$$

Au loc relaţiile:

(i) $Arc\sinh z = Ln\left(z + \sqrt{z^2+1}\right)$,

(ii) $Arc\cosh z = Ln\left(z + \sqrt{z^2-1}\right)$,

(iii) $Arc\tanh z = \dfrac{1}{2}Ln\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)$, pentru $z \notin \{-1, 1\}$,

(iv) $Arc\coth z = \dfrac{1}{2}Ln\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)$, pentru $z \notin \{-1, 1\}$.

2.9 Drumuri în $\mathbb{C}$

În acest paragraf reamintim noţiuni şi rezultate de bază privind drumurile parametrizate în $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ din analiza reală. O curbă Γ în $\mathbb{C}$ este o mulţime de puncte în planul complex care se poate interpreta intuitiv astfel: în vecinătatea fiecărui punct al său punctele curbei respective Γ reprezintă traiectoria unui mobil în mişcare într-un plan reprezentând mulţimea imagine $\mathbf{im}\,(\gamma) = \gamma\,(I)$ a unei funcţii complexe $\gamma : I \to \mathbb{C}$, unde $I \subseteq \mathbb{R}$ este un interval real. De exemplu, punctul $\gamma\,(t) = e^{it}$ parcurge cercul unitate din planul complex când parametrul real t creşte de la 0 la 2π din punctul $1 = \gamma\,(0)$ pentru $t = 0$ în el însuşi $1 = \gamma\,(2\pi)$ pentru $t = 2\pi$.

Introducem în continuare noţiuni şi proprietăţi privind funcţiile complexe de o variabilă reală care sunt necesare în continuare. Se introduc apoi definiţiile unor drumuri parametrizate de diverse tipuri.

Definiţii 1. Fie $\gamma = x + iy : [a, b] \to \mathbb{C}$ cu

$$\gamma\,(t) = x\,(t) + iy\,(t)\,, \forall t \in [a, b] \subseteq \mathbb{R}$$

o funcţie complexă de o variabilă reală definită pe un interval real $[a, b]$ $(a \le b)$.

Funcţiile reale componente ale funcţiei vectoriale reale $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,

$$x : [a, b] \to \mathbb{R} \text{ şi } y : [a, b] \to \mathbb{R},$$

se numesc respectiv partea reală a lui γ şi partea imaginară a lui γ şi se notează $x = \operatorname{Re}\gamma$ şi $y = \operatorname{Im}\gamma$.

(i) Funcţia γ se numeşte *continuă* pe $[a, b]$ dacă ambele funcţii reale x şi y sunt continue pe $[a, b]$.

(ii) Funcţia γ se numeşte *derivabilă* pe $[a, b]$ dacă ambele funcţii reale

$$x = \operatorname{Re}\gamma \text{ şi } y = \operatorname{Im}\gamma$$

sunt derivabile pe $[a, b]$ şi în acest caz definim funcţia derivată a lui γ prin

$$\gamma' = (\operatorname{Re}\gamma)' + i\,(\operatorname{Im}\gamma)' : [a, b] \to \mathbb{C},$$

deci $(\forall t \in [a, b])\,\gamma'\,(t) = x'\,(t) + iy'\,(t)$.

Definiţii 2. Fie $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ $(-\infty < a \le b < +\infty)$. Dacă $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ este o funcţie continuă pe $[a, b]$ şi $\Gamma = \mathbf{im}\,(\gamma) = \{\gamma\,(t) : t \in [a, b]\} \subseteq \mathbb{C}$, atunci γ se numeşte un *drum parametrizat cu mulţimea suport* Γ*, cu intervalul parametrilor* $[a,b]$*, cu punctul iniţial* $\gamma(a)$ *şi cu punctul final* $\gamma(b)$. Un drum parametrizat $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ se numeşte:

(i) *închis*, dacă $\gamma(a)=\gamma(b)$;

(ii) *simplu*, dacă γ este o funcţie injectivă sau $\gamma(a)=\gamma(b)$ şi restricţia lui γ la intervalul deschis (a,b), $\gamma:(a,b)\to\mathbb{C}$, este o funcţie injectivă;

(iii) *neted* dacă funcţia γ este de clasă $C^1[a,b]$ (γ este derivabilă şi cu derivata γ' continuă pe $[a,b]$) astfel încât $\gamma'(t)\neq 0$, $\forall t\in[a,b]$;

(iv) *neted pe porţiuni,* dacă există o diviziune a intervalului $[a,b]$,

$$a=x_0<x_1<...<x_n=b,$$

astfel încât pentru orice $i\in\{0,1,...,n-1\}$, funcţia γ este de clasă $C^1[x_i,x_{i+1}]$ satisfăcând condiţia $\gamma'(t)\neq 0$, $\forall t\in[x_i,x_{i+1}]$;

(v) *aproape neted* dacă funcţia γ este de clasă $C^1(a,b)$ (γ este derivabilă şi cu derivata γ' continuă pe intervalul deschis (a,b)) astfel încât $\gamma'(t)\neq 0$, $\forall t\in(a,b)$;

(vi) *aproape neted pe porţiuni*, dacă există o diviziune a intervalului $[a,b]$, $a=x_0<x_1<...<x_n=b$, astfel încât pentru orice $i\in\{0,1,...,n-1\}$, funcţia γ este de clasă $C^1(x_i,x_{i+1})$ satisfăcând condiţia $\gamma'(t)\neq 0$, $\forall t\in(x_i,x_{i+1})$.

Consecinţe 3. Fie $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ un drum parametrizat având intervalul parametrilor $[a,b]$ şi suportul $\Gamma=\mathbf{im}(\gamma)$.

Sunt îndeplinite condiţiile următoare:

(i) $\Gamma\subseteq\mathbb{C}$ este o mulţime compactă în $\mathbb{C}$, deci Γ este mărginită şi închisă;

(ii) Γ este o mulţime închisă în orice disc deschis $D_r(a)$ ($a\in\mathbb{C}$ şi $r\in\mathbb{R}_+^*$) cu proprietatea $\Gamma\subseteq D_r(a)$;

(iii) există $t_{\max}\in[a,b]$ cu proprietatea că

$$|\gamma(t_{\max})|=\max\{|\gamma(t)|:t\in[a,b]\}, \text{ deci}$$
$$(\forall t\in[a,b])\,|\gamma(t)|\leq|\gamma(t_{\max})|.$$

Definiţii 4. Fie $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ un drum parametrizat. Drumul opus lui γ este un drum parametrizat care este definit prin funcţia $-\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ satisfăcând relaţia următoare:

$$(\forall t\in[a,b])\,(-\gamma)(t)=\gamma(a+b-t).$$

Observaţii 5. Dacă $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ este un drum parametrizat, atunci:

- $\gamma(a)$ este punct iniţial pentru γ şi punct final pentru drumul opus $-\gamma$;
- $\gamma(b)$ este punct final pentru γ şi punct iniţial pentru drumul opus $-\gamma$;
- $\mathbf{im}(-\gamma)=\mathbf{im}(\gamma)$, deci drumul opus $-\gamma$ şi drumul iniţial γ au aceeaşi mulţime suport.

Comentarii. Orice drum parametrizat $\gamma:[\alpha,\beta]\to\mathbb{C}$ poate fi considerat intuitiv un drum orientat a cărui mulţime suport $\Gamma=\mathbf{im}(\gamma)$ este parcursă din punctul $\gamma(\alpha)\in\Gamma$ în punctul $\gamma(\beta)\in\Gamma$ în sensul corespunzător creşterii parametrului $t\in[\alpha,\beta]$ de la valoarea $t=\alpha$ la valoarea $t=\beta$. Conform celor menţionate anterior, drumul opus lui γ, $-\gamma:[\alpha,\beta]\to\mathbb{C}$, este intuitiv un drum orientat având mulţimea suport $\mathbf{im}(-\gamma)=\Gamma=\mathrm{Im}(\gamma)$ egală cu mulţimea suport a drumului γ, dar care este parcursă din punctul $(-\gamma)(\alpha) = \gamma(\beta) \in \Gamma$ în punctul $(-\gamma)(\beta) = \gamma(\alpha) \in \Gamma$ atunci când parametrul $t \in [\alpha, \beta]$ creşte de la valoarea $t = \alpha$ la valoarea $t = \beta$. Deci, drumurile γ şi $-\gamma$ pot fi considerate intuitiv cu orientări diferite (Fig. 18).

Definiţia 6. Fie $\gamma_1 : [a_1, b_1] \to \mathbb{C}$ şi $\gamma_2 : [a_2, b_2] \to \mathbb{C}$ drumuri parametrizate pe intervalele reale $[a_1, b_1] \subseteq \mathbb{R}$ şi $[a_2, b_2] \subseteq \mathbb{R}$ ($a_1 \leq b_1$ şi $a_2 \leq b_2$) astfel încât

$$\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2).$$

Definim un drum parametrizat

$$\gamma_1 \cup \gamma_2 : [a_1, b_1 + b_2 - a_2] \to \mathbb{C}$$

cu intervalul parametrilor $[a_1, b_1 + b_2 - a_2]$ prin următoarea relaţie, pentru orice $t \in [a_1, b_1 + b_2 - a_2]$:

$$(\gamma_1 \cup \gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{dacă} \quad t \in [a_1, b_1] \\ \gamma_2(t + a_2 - b_1) & \text{dacă} \quad t \in [b_1, b_1 + b_2 - a_2] \end{cases}.$$

Corespondenţa $(\gamma_1, \gamma_2) \mapsto \gamma_1 \cup \gamma_2$ defineşte o operaţie cu drumuri numită *juxtapunere* sau *concatenare* de drumuri parametrizate.

Definiţia 7. Fie $n \in \mathbb{N}$ cu $n \geq 2$. Presupunem că $(\gamma_k : [a_k, b_k] \to \mathbb{C})_{k=\overline{1,n}}$ este o familie de drumuri parametrizate respectiv pe intervalele $([a_k, b_k])_{k=\overline{1,n}}$ care satisface următoarea condiţie:

$$\left(\forall k = \overline{1, n-1}\right) \gamma_k(b_k) = \gamma_{k+1}(a_{k+1}).$$

Juxtapunerea familiei $(\gamma_k)_{k=\overline{1,n}}$ este un drum parametrizat care se notează $\bigcup\limits_{k=1}^{n} \gamma_k$ şi care este definit prin inducţie după $n \in \mathbb{N}$ cu $n \geq 2$ prin regulile următoare:

(i) dacă $n = 2$, atunci

$$\bigcup_{k=1}^{2} \gamma_k = \gamma_1 \cup \gamma_2,$$

unde $\gamma_1 \cup \gamma_2$ este funcţia definită conform [2.9 Def. 6];

(ii) dacă pentru $m \in \mathbb{N}$ cu $m < n$ funcţia $\bigcup\limits_{k=1}^{m} \gamma_k$ este definită, atunci definim o nouă funcţie prin relaţia următoare:

$$\bigcup_{k=1}^{m+1} \gamma_k = \left(\bigcup_{k=1}^{m} \gamma_k\right) \cup \gamma_{m+1},$$

unde membrul drept este definit pe baza [2.9 Def.6].

Exemple 8. a) Fie $a, b \in \mathbb{C}$ cu $a \neq b$. Relaţia

$$\gamma(t) = (1-t)a + tb, \forall t \in [0, 1]$$

defineşte un drum parametrizat neted $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ cu intervalul parametrilor $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ pe care-l numim un *segment orientat* (în planul complex $\mathbb{C}$, mulţimea suport a lui γ este segmentul orientat $\Gamma = \mathbf{im}(\gamma) = \overrightarrow{ab}$ de extremităţi a şi b).

b) Un *arc de cerc* este un drum parametrizat neted $\gamma : [\varphi_1, \varphi_2] \to \mathbb{C}$ cu intervalul parametrilor $[\varphi_1, \varphi_2] \subseteq \mathbb{R}$ ($0 \leq \varphi_2 - \varphi_1 \leq 2\pi$), unde $\gamma : [\varphi_1, \varphi_2] \to \mathbb{C}$ este o funcţie definită printr-o relaţie de forma următoare:

$$(\forall t \in [\varphi_1, \varphi_2])\, \gamma(t) = a + re^{it},$$

unde $a \in \mathbb{C}$ este centrul unui cerc de rază $r \in \mathbb{R}_+^*$.

c) Fie $\gamma_1 : [0, \pi] \to \mathbb{C}$ cu

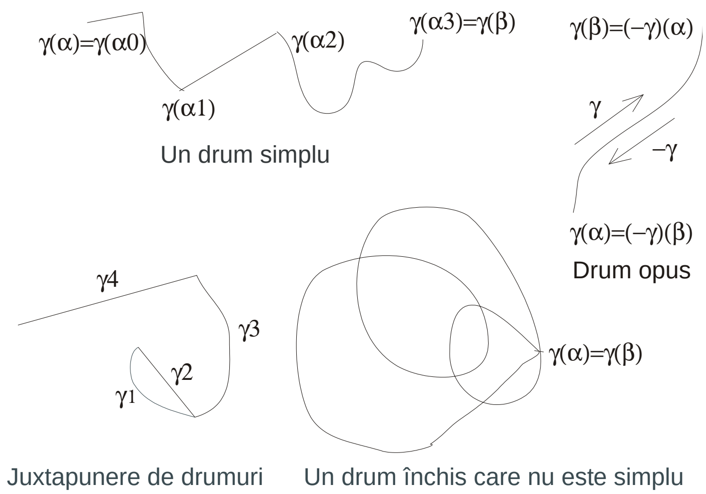

Figure 18: Drumuri în $\mathbb{C}$

$\gamma_1(t) = re^{it}, \forall t \in [0, \pi]$
arcul de cerc cu centrul în origine şi de rază $r \in \mathbb{R}_+^*$ care uneşte punctele $B(r, 0), P(0, r)$ şi $A(-r, 0)$ corespunzătoare respectiv valorilor $t = 0, t = \frac{\pi}{2}$ şi $t = \pi$. În plus, să considerăm segmentul orientat de origine $-r \equiv A(-r, 0)$ şi de extremitate $r \equiv B(r, 0)$ definit de drumul parametrizat $\gamma_2 : [0, 1] \to \mathbb{C}$ cu
$\gamma_2(t) = (1 - t)(-r) + tr, \forall t \in [0, 1]$.
Atunci juxtapunerea $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ reprezintă un drum neted pe porţiuni închis $[\gamma(0) = \gamma(\pi + 1) = r \equiv B(r, 0)]$ (2.9 Fig. 19).

Observaţii 9. (i) Dacă $\gamma = \bigcup\limits_{k=1}^{m} \gamma_k$ este o juxtapunere de drumuri netede (2.9 Def. 7), atunci γ este un *drum neted pe porţiuni.*

(ii) Un *drum mixt linie-arc de cerc* este un drum parametrizat γ astfel încât $\gamma = \bigcup\limits_{k=1}^{m} \gamma_k$ $(m \in \mathbb{N}$ fixat) este o juxtapunere de drumuri parametrizate şi

(α) $\left(\forall k = \overline{1, m}\right)$ γ_k este fie un *segment orientat*, fie un *arc de cerc.*

Orice drum mixt linie-arc de cerc are proprietatea că este un drum parametrizat neted pe porţiuni. Un *contur mixt linie-arc de cerc* γ este un drum mixt linie-arc de cerc închis şi simplu, deci

$$\gamma : [a, b] \to \mathbb{C} \text{ este de forma } \gamma = \bigcup_{k=1}^{m} \gamma_k \text{ verificând } (\alpha)$$

şi în plus $\gamma(b) = \gamma(a)$ cu $\gamma : (a, b) \to \mathbb{C}$ injectivă.

Comentariu. Un contur mixt linie-arc de cerc $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ este considerat intuitiv *pozitiv orientat* dacă pentru valorile parametrului crescând de la $t = a$ la $t = b$, punctele $\gamma(t) \in \Gamma$ se deplasează pe Γ în sens invers mişcării acelor de ceasornic din $\gamma(a)$ în $\gamma(b) = \gamma(a)$.

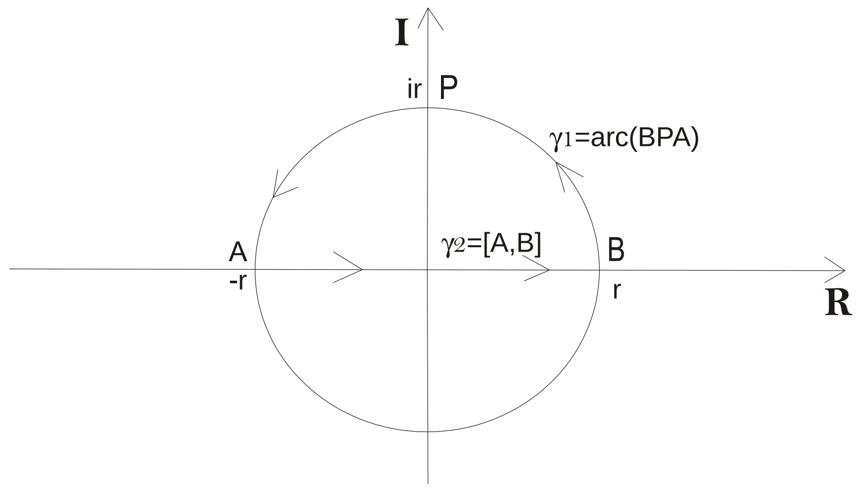

Figure 19: Conturul $\gamma_1 \cup \gamma_2$ din [2.9 Ex. 8 *c*)]: $\Gamma = \overrightarrow{AB} \cup \widehat{BPA}$.

Exemplu 10. Juxtapunerea de funcţii netede din [2.9 Ex. 8 *c*)] $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ reprezintă un drum mixt linie-arc de cerc închis şi simplu, deci γ reprezintă un contur. În plus, conturul respectiv γ este pozitiv orientat [2.9 Fig. 19].

Încheiem acest paragraf cu prezentarea unor rezultate de bază importante pentru aplicaţii privind juxtapunerea de drumuri parametrizate netede şi studiul noţiunii de contur în planul complex.

Primul rezultat este *teorema de acoperire* referitoare la juxtapunerile de funcţii netede. *Teorema curbei Jordan* este o teoremă celebră care exprimă un rezultat intuitiv evident: un drum parametrizat, închis şi simplu împarte planul în două componente conexe, dintre care una este mărginită şi cealaltă este nemărginită [Aleksandrov, 1949]. Următoarele rezultate se referă la un caz particular al teoremei curbei Jordan (cazul contururilor mixte linie-arc de cerc) şi la teorema triangulării contururilor poligonale.

Teorema 11 (*Teorema de acoperire*). Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ o mulţime deschisă şi $\gamma : [a, b] \to D$ un drum parametrizat definit printr-o juxtapunere de drumuri netede (vezi 2.9 Obs.9 (i)). Atunci există un număr real pozitiv $r \in \mathbb{R}_+^*$, o familie finită de $n+1$ discuri deschise $D_0, D_1, ..., D_n$ ($n \in \mathbb{N}$) şi o diviziune a intervalului $[a, b]$, $a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$, astfel încât să fie îndeplinite condiţiile următoare:

1. $\left(\forall k = \overline{0, n}\right) D_k = D_a\left(\gamma\left(t_k\right)\right)$;

2. $\left(\forall k = \overline{0, n-1}\right) D_k \cap D_{k+1} \neq \emptyset$;

3. $\left(\forall k = \overline{0, n-1}\right) \gamma\left(\left[t_k, t_{k+1}\right]\right) \subseteq D_k$;

4. $\mathbf{im}\,(\gamma) \subseteq \bigcup\limits_{k=0}^{n} D_k \subseteq D$.

Teorema 12. (*Teorema curbei Jordan pentru contururi mixte linie-arc de cerc*). Fie $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un contur mixt linie-arc de cerc şi $\Gamma^c = \mathbb{C} \setminus \Gamma$ mulţimea complement a lui $\Gamma = \mathbf{im}\,(\gamma)$ relativ la planul complex $\mathbb{C}$. Atunci au loc următoarele proprietăţi:

(i) γ este un drum parametrizat închis şi simplu (curbă Jordan);

(ii) există o pereche $(\mathbf{I}\,(\gamma)\,, \mathbf{O}\,(\gamma))$ de mulţimi deschise, conexe şi disjuncte astfel încât $\Gamma^c = \mathbf{I}\,(\gamma) \cup \mathbf{O}\,(\gamma)$, $\mathbf{I}\,(\gamma)$ este mărginită şi $\mathbf{O}\,(\gamma)$ este nemărginită.

În condiţiile teoremei precedente, mulţimea $\mathbf{I}\,(\gamma)$ se numeşte interiorul şi mulţimea $\mathbf{O}\,(\gamma)$ se numeşte exteriorul conturului γ. O reprezentare geometrică privind acest fapt este dată în fig. 20.

Pe baza rezultatelor prezentate anterior se deduce următorul fapt:

Triangularea unui contur poligonal. Fie $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ o funcţie continuă care reprezintă un contur poligonal cu interiorul $\mathbf{I}\,(\gamma)$ astfel încât poligonul suport $\Gamma = \gamma\,([a,b])$ are n vârfuri $z_1, z_2, ..., z_n$, unde $n \in \mathbb{N}$ cu $n > 3$. Atunci există $n-3$ segmente $[z_j, z_k]$ $(j, k \in \{1, 2, ..., n\})$ astfel încât $[z_j, z_k] \setminus \{z_j, z_k\} \subseteq \mathbf{I}\,(\gamma)$ şi aceste segmente definesc o partiţie a lui $\mathbf{I}\,(\gamma)$ în $n-2$ triunghiuri.

Pentru a demonstra acest rezultat, se consideră două cazuri:

Cazul 1. $\mathbf{I}\,(\gamma)$ este o mulţime convexă; în acest caz familia de segmente $([z_1, z_k])_{k=\overline{3,n-1}}$ satisface condiţiile cerute în enunţ;

Cazul 2. $\mathbf{I}\,(\gamma)$ nu este o mulţime convexă; în acest caz,

$$(\exists k \in \{1, 2, ..., n\})\, \widehat{z_k} > \pi;$$

pentru fixarea ideilor, presupunem că pentru $k = 1$ avem $\widehat{z_1} > \pi$; fie $\epsilon > 0$ astfel încât $D_\epsilon\,(z_1) \cap \mathbf{I}\,(\gamma) \neq \emptyset$ şi ρ o rază de origine z_1 cu $\rho \subseteq \mathbf{I}\,(\gamma)$); atunci $\rho \cap \Gamma = \{w_\rho\}$; există ρ astfel încât în plus $(\exists k \in \{1, 2, ..., n\})\, z_k = w_\rho$; segmentul $[z_1, z_k]$ se poate utiliza în continuare pentru crearea de noi contururi poligonale în $\mathbb{C}$ cu cel mult n vârfuri; aplicând succesiv argumentele precedente se obţine familia de segmente cu proprietăţile din enunţ.

3 FUNCŢII OLOMORFE

În acest paragraf prezentăm rezultate matematice de bază privind studiul funcţiilor olomorfe. Orice funcţie olomorfă este reprezentată printr-o pereche de funcţii reale diferenţiabile. Există însă o distincţie semnificativă între cele două concepte evidenţiată matematic prin teorema Cauchy-Riemann a cărei prezentare este obiectivul principal al acestui paragraf. Adoptăm ca definiţie a noţiunii de funcţie olomorfă extensia corespunzătoare la planul complex a definiţiei noţiunii de funcţie reală de o variabilă reală derivabilă. Prezentăm apoi un set de metode fundamentale de calcul cu funcţii olomorfe obţinute din această definiţie ca în cazul funcţiilor reale. Teorema fundamentală Cauchy-Riemann de caracterizare a acelor perechi de funcţii reale diferenţiabile care reprezintă cartezian funcţii olomorfe şi primele consecinţe de bază ale acestei teoreme sunt apoi prezentate.

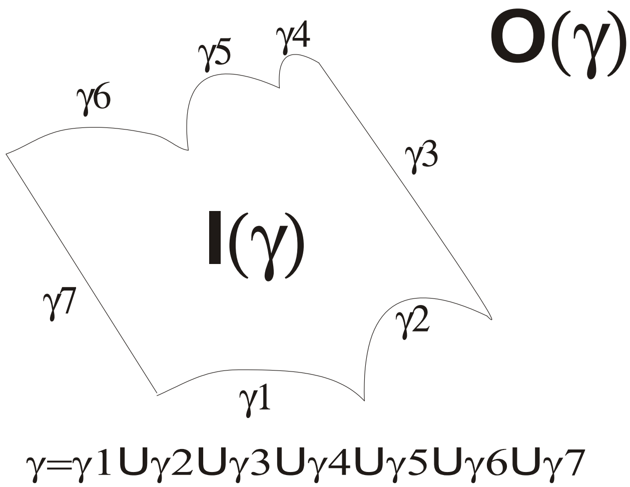

Figure 20: Teorema curbei Jordan

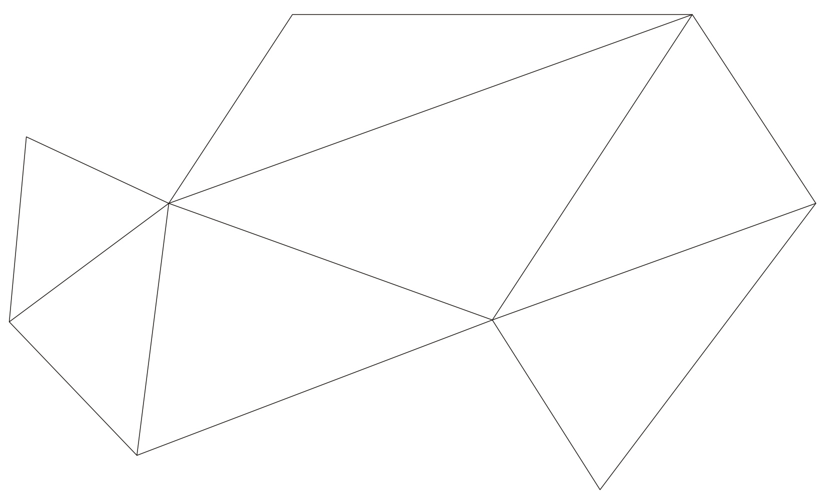

Figure 21: Triangularea unui contur poligonal

3.1 Definiţii şi exemple

Definiţii 1. Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ o mulţime deschisă, $z \in D$ şi $f : D \to \mathbb{C}$ o funcţie.

(i) Funcţia f se numeşte olomorfă în punctul z dacă există un număr complex notat $f'(z) \in \mathbb{C}$ astfel încât

$$f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}.$$

Dacă funcţia f este olomorfă în punctul z atunci vom mai spune şi că f este $\mathbb{C}$-derivabilă în z. Numărul complex $f'(z)$ satisfăcând condiţia precedentă se numeşte derivata funcţiei f în punctul z.

(ii) O funcţie $f : D \to \mathbb{C}$ se numeşte olomorfă sau $\mathbb{C}$-derivabilă pe D dacă pentru orice $z \in D$, f este olomorfă în z.

Definiţii 2. Definim mulţimea $\mathcal{C}(D)$ a funcţiilor complexe continue pe D şi mulţimea $\mathcal{O}(D)$ a funcţiilor olomorfe pe D astfel:

$$\mathcal{C}(D) = \{f : D \to \mathbb{C} : f \text{ este continuă pe } D\},$$
$$\mathcal{O}(D) = \{f : D \to \mathbb{C} : f \text{ este olomorfă pe } D\}.$$

Definiţii 3. Pentru orice funcţii $f, g \in \mathcal{C}(D)$ şi pentru orice număr complex $\lambda \in \mathbb{C}$, notăm prin $f + g$ şi $f \cdot g$ funcţiile continue pe D reprezentând respectiv suma şi produsul perechii (f, g), iar prin λf funcţia continuă pe D reprezentând produsul dintre scalarul λ şi funcţia f definite punctual prin relaţiile următoare, pentru orice $z \in D$:

$$(f + g)(z) = f(z) + g(z);\ (f \cdot g)(z) = f(z) \cdot g(z);\ (\lambda f)(z) = \lambda \cdot f(z).$$

Notaţie 4. Pentru orice mulţime nevidă $U \subseteq \mathbb{C}$ şi orice funcţie $\alpha : U \to \mathbb{C}$ notăm $Zero(\alpha) = \{u \in U : \alpha(u) = 0\}$ şi numim punctele $u \in Zero(\alpha)$ zerouri ale funcţiei α în U.

Notaţie 5. Fie $f, g : D \to \mathbb{C}$ şi $D[f/g] = D \setminus Zero(g)$. Atunci notăm prin $\frac{f}{g} : D[f/g] \to \mathbb{C}$ funcţia complexă definită punctual prin câtul perechii (f, g) în modul următor:

$$(\forall z \in D[f/g])\ \frac{f}{g}(z) = \frac{f(z)}{g(z)}.$$

Notaţie 6. Fie $f : D \to E$ şi $g : E \to \mathbb{C}$ funcţii complexe, unde $D, E \subseteq \mathbb{C}$ sunt mulţimi nevide de puncte în planul complex. Notăm prin $g \circ f : D \to \mathbb{C}$ funcţia reprezentând compunerea perechii (g, f) definită astfel:

$$(\forall z \in D)\ (g \circ f)(z) = g(f(z)).$$

Notaţie 7. Dacă $f : D \to \mathbb{C}$ este olomorfă pe D atunci există o funcţie notată $f' : D \to \mathbb{C}$ numită derivata lui f pe D astfel încât pentru orice $z \in D$, $f'(z)$ este derivata funcţiei f în punctul z.

Exemplu 8. Fie $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ cu $f(z) = z^3$, $\forall z \in \mathbb{C}$. Atunci pentru orice punct $z \in \mathbb{C}$:

$$\exists \lim_{h\to 0} \frac{(z+h)^3 - z^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3z^2h + 3zh^2 + h^3}{h} = \lim_{h\to 0} \left(3z^2 + 3zh + h^2\right) = 3z^2,$$

deci $f \in \mathcal{O}(D)$ şi derivata $f' : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ este definită prin relaţia

$$f'(z) = \left(z^3\right)' = 3z^2,\ \forall z \in \mathbb{C}.$$

Exemplu 9. Fie $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definită prin relaţia $f(z) = \overline{z}$, $\forall z \in \mathbb{C}$. Atunci pentru orice $h \in (\mathbb{C} \setminus \{0\}) \cap (\mathcal{R} \cup I)$,

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h}=\frac{\overline{z+h}-\overline{z}}{h}=\frac{\overline{h}}{h}=\begin{cases}1, & \text{dacă} \quad h\in\mathcal{R}\\ -1, & \text{dacă} \quad h\in\mathcal{I}\end{cases},$$

deci în acest caz $(\forall z\in\mathbb{C})\nexists\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(z+h)-f(z)}{h}$, deci f nu este olomorfă în nici un punct din $\mathbb{C}$. Rezultatul precedent s-a obţinut prin analizarea existenţei limitei raportului $\dfrac{f(z+h)-f(z)}{h}$ când $h\to 0$ doar pentru două cazuri, $h\in\mathcal{R}$ şi $h\in\mathcal{I}$. O condiţie necesară ca f să fie olomorfă în z este următoarea:

$$\exists\lim_{h\to 0,\ h\in\mathcal{R}}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}=f'_{\mathcal{R}}(z)=f'_{\mathcal{I}}(z)=\lim_{h\to 0,\ h\in\mathcal{I}}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}.$$

Această condiţie se utilizează pentru a arăta că anumite funcţii f nu sunt olomorfe în z, cum este de exemplu cazul considerat anterior sau cazul funcţiilor $g,\,h:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ cu $g(z)=\operatorname{Re}z$ şi $h(z)=\operatorname{Im}z,\forall z\in\mathbb{C}$.

3.2 Funcţii complexe polinomiale

În acest paragraf prezentăm rezultate privind studiul funcţiilor complexe definite printr-o pereche de funcţii polinomiale reale de două variabile reale în conexiune cu noţiunea de funcţie olomorfă introdusă anterior.

Definiţia 1. Numim *funcţie polinomială* o funcţie $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ definită printr-o expresie de forma următoare:

(1) $f(z)=u(x,y)+iv(x,y),\forall z=x+iy\in\mathbb{C}=\mathbb{R}^2$,

unde $u,v:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ sunt funcţii polinomiale reale de două variabile reale.

Introducem următoarele notaţii:

(2) $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$;

(3) $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial y}$.

Definiţia 2. O funcţie polinomială $f=u+iv:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, se numeşte *funcţie polinomială analitică* dacă există un număr întreg nenegativ $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ şi un şir finit de numere complexe $a=(a_0,a_1,...,a_n)\in\mathbb{C}^{n+1}$ cu $a_0\neq 0$ astfel încât să fie satisfăcută relaţia următoare:

(4) $f(z)=P_n[a](z),\forall z\in\mathbb{C}$,

unde $P_n[a]:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ este funcţia polinomială analitică de grad n corespunzătoare lui a definită în 2.1 Ex. 6, adică

(5) $P_n[a](z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+...+a_n,\forall z=x+iy\in\mathbb{C}$.

În continuare presupunem că $f=u+iv:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ este o funcţie polinomială.

Exerciţiu 3. Să se arate că dacă

$$f(z)=x^2-y^2+x+i(2x+1)y,\forall z=x+iy\in\mathbb{C},$$

atunci f este o funcţie polinomială analitică de grad 2.

Exerciţiu 4. Să se arate că dacă

$$f(z)=x^2+y^2-2ixy,\forall z=x+iy\in\mathbb{C},$$

atunci f nu este o funcţie polinomială analitică.

Exerciţiu 5. Presupunem că $f(z)=x^2+iQ(x,y),\forall z=x+iy\in\mathbb{C}$, unde $Q:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ este o funcţie polinomială reală oarecare de două variabile reale. Să se arate că f nu este o funcţie polinomială analitică.

Exerciţiu 6. Presupunem că $f(z) = P(x, y) + 2ixy, \forall z = x + iy \in \mathbb{C}$, unde $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ este o funcţie polinomială reală oarecare de două variabile reale. Ce condiţii trebuie să satisfacă P pentru ca f să fie o funcţie polinomială analitică.

Prin urmare, se poate pune problema de a determina funcţiile polinomiale care sunt şi funcţii polinomiale analitice. Răspunsul la această problemă este dat în propoziţia care urmează.

Propoziţia 7. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:
(i) Funcţia f este o funcţie polinomială analitică (Def. 2).
(ii) Are loc identitatea $\frac{\partial f}{\partial y} = i\frac{\partial f}{\partial x}$ (a se vedea notaţiile (2) şi (3) de mai sus).

Comentarii. Identitatea $\frac{\partial f}{\partial y} = i\frac{\partial f}{\partial x}$ din propoziţia 7 (ii) este echivalentă cu identitatea $\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y} = i\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)$, ceea ce se exprimă prin relaţiile următoare:

$$(6)\ \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} & = & \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & = & -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}.$$

Relaţiile (6) se numesc *ecuaţiile Cauchy-Riemann.* Rezultă că o funcţie polinomială $f = u + iv : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ este o funcţie polinomială analitică dacă şi numai dacă perechea (u, v) satisface ecuaţiile Cauchy-Riemann (6). Prin urmare, orice funcţie polinomială f care verifică (6) este de forma $f = P_n[a] : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (a se revedea relaţiile (4) şi (5)), deci în acest caz funcţia f este olomorfă pe $\mathbb{C}$, deoarece orice funcţie polinomială analitică $P_n[a] : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ este olomorfă pe $\mathbb{C}$. Într-adevăr, din 3.1 Def. 1 (i) şi 3.2 Def.2 (5), rezultă că pentru orice $z \in \mathbb{C}$,

$$\exists \lim_{h \to 0} \frac{P_n[a](z+h) - P_n[a](z)}{h} = na_0 z^{n-1} + (n-1) a_1 z^{n-2} + ... + a_{n-1}$$

(pentru detalii, a se vedea rezolvarea Exerciţiului 1 din 3.5), deci funcţia $P_n[a]$ este olomorfă pe $\mathbb{C}$ cu derivata $P'_n[a] : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definită prin relaţia următoare, pentru orice $z \in \mathbb{C}$

$$(7)\ P'_n[a](z) = na_0 z^{n-1} + (n-1) a_1 z^{n-2} + ... + a_{n-1}.$$

Subparagraful următor precizează semnificaţia ecuaţiilor Cauchy-Riemann (6).

3.3 Ecuaţiile Cauchy-Riemann

Se pune problema de a analiza proprietăţile funcţiilor reale $u = \mathrm{Re}\, f$ şi $v = \mathrm{Im}\, f$ componente ale unei funcţii olomorfe $f = u + iv \in \mathcal{O}(D)$. Rezultatul următor prezintă o condiţie necesară pentru ca $f \in \mathcal{O}(D)$.

Teorema 1. Fie $f = u + iv : D \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă în $z = x + iy \in D$. Atunci funcţiile reale u şi v au derivate parţiale de ordinul întâi în punctul (x, y) notate $\frac{\partial u}{\partial x}(x, y), \frac{\partial u}{\partial y}(x, y), \frac{\partial v}{\partial x}(x, y), \frac{\partial v}{\partial y}(x, y)$ şi în plus sunt satisfăcute următoarele condiţii, numite *ecuaţiile Cauchy-Riemann*:

$$(\mathrm{CR}) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) & = & \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) & = & -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) \end{cases}.$$

Demonstraţie. Conform [3.1 Def.1 (i)] rezultă

$$f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}.$$

Restrângând limita din membrul drept al relaţiei anterioare respectiv la $h \in \mathcal{R}$ şi $h \in \mathcal{I}$ deducem următoarele relaţii:

$f'(z) = \lim\limits_{h\to 0 \text{ cu } h\in\mathcal{R}} \left(\frac{u(x+h,y)-u(x,y)}{h} + i\frac{v(x+h,y)-v(x,y)}{h} \right)$ şi
$f'(z) = \lim\limits_{h\to 0 \text{ cu } ih\in\mathcal{I}} \left(\frac{u(x,y+h)-u(x,y)}{ih} + i\frac{v(x,y+h)-v(x,y)}{ih} \right)$.
Obţinem că există $\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)$, $\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)$, $\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$, $\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)$ şi au loc relaţiile:
$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$,
$f'(z) = \frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)$,
deci egalând părţile reale şi părţile imaginare ale numărului complex $f'(z)$ din reprezentările carteziene precedente deducem (**CR**).

Rezultatul complet de caracterizare a funcţiilor olomorfe va fi stabilit în paragraful următor. Teorema care urmează prezintă condiţii suficiente pentru ca $f = u + iv : D \to \mathbb{C}$ să fie o funcţie olomorfă.

Teorema 2. Fie $f = u + iv : D \to \mathbb{C}$ o funcţie complexă definită pe o mulţime deschisă $D \subseteq \mathbb{C}$ astfel încât
$(\forall z = x + iy \in D)\, f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$.
Presupunem că funcţiile reale $u, v : D \to \mathbb{R}$ sunt de clasă $C^1(D)$, deci există derivatele parţiale de ordinul întâi ale funcţiilor u şi v astfel încât
$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} : D \to \mathbb{R}$ sunt funcţii continue pe D.
Dacă sunt satisfăcute şi ecuaţiile Cauchy-Riemann (CR) atunci $\exists f' : D \to \mathbb{C}$.

Demonstraţie. Fie $z = x + iy \in D$ şi $r \in \mathbb{R}_+^*$ astfel încât $D_r(z) \subseteq D$. Pentru orice $h = h_1 + ih_2 \in \mathbb{C} \setminus (\mathcal{R} \cup \mathcal{I})$ astfel încât $|h| < r$ avem $z + h \in D$ şi sunt valabile relaţiile următoare:
$\dfrac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{(u(x+h_1,y+h_2)+iv(x+h_1,y+h_2))-(u(x,y)+iv(x,y))}{h} =$
$\left(\frac{h_1}{h}\frac{u(x+h_1,y+h_2)-u(x,y+h_2)}{h_1} + \frac{h_2}{h}\frac{u(x,y+h_2)-u(x,y)}{h_2} \right) +$
$i\left(\frac{h_1}{h}\frac{v(x+h_1,y+h_2)-v(x,y+h_2)}{h_1} + \frac{h_2}{h}\frac{v(x,y+h_2)-v(x,y)}{h_2} \right)$.
Utilizând teoremele de medie pentru funcţiile definite prin corespondenţele $x \mapsto u(x, y + h_2)$, $y \mapsto u(x,y)$, $x \mapsto v(x, y + h_2)$ şi $y \mapsto v(x,y)$ rezultă că există $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in (0,1) \subseteq \mathbb{R}_+$ astfel încât
$\dfrac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{h_1}{h}\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x + \alpha h_1, y + h_2) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x + \beta h_1, y + h_2) \right) +$
$\frac{h_2}{h}\left(\frac{\partial u}{\partial y}(x, y + \gamma h_2) + i\frac{\partial v}{\partial y}(x, y + \delta h_2) \right)$.
Utilizând continuitatea derivatelor parţiale şi ecuaţiile Cauchy-Riemann, din relaţiile anterioare deducem că
$\exists \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = f'(z)$.

Rezultatul următor prezintă proprietăţi elementare de calcul al derivatelor unor funcţii olomorfe construite prin aplicarea operaţiilor algebrice cu funcţii menţionate în [3.1 Not. 3-6].

Teorema 3. Pentru orice mulţime deschisă de puncte în planul complex $D \subseteq \mathbb{C}$, sunt îndeplinite condiţiile următoare:
(i) dacă $f, g \in \mathcal{O}(D)$ şi $\lambda \in \mathbb{C}$ atunci
$a)$ $\{f + g, f - g, f \cdot g, \lambda f\} \subseteq \mathcal{O}(D)$,

$b)$ $\frac{f}{g} \in \mathcal{O}(D[f/g])$

şi au loc următoarele reguli de derivare:

$(r1)$ $(f+g)' = f' + g'$;

$(r2)$ $(f-g)' = f' - g'$;

$(r3)$ $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$;

$(r4)$ $(\lambda f)' = \lambda f'$;

$(r5)$ $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$;

(ii) dacă $f : D \to E$ şi $g : E \to \mathbb{C}$ sunt funcţii olomorfe cu $f \in \mathcal{O}(D)$ şi $g \in \mathcal{O}(E)$ atunci funcţia compusă $g \circ f : D \to \mathbb{C}$ este olomorfă cu $g \circ f \in \mathcal{O}(D)$ şi are loc următoarea formulă de derivare:

$(r6)$ $(\forall z \in D)\, (g \circ f)'(z) = f'(z) \cdot g'(f(z))$.

Demonstraţie. (i) Fie $f, g \in \mathcal{O}(D)$ şi $\lambda \in \mathbb{C}$. Presupunem că $z \in D$ şi $h \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ astfel încât $z + h \in D$. Atunci au loc relaţiile următoare:

(1) $\frac{(f+g)(z+h)-(f+g)(z)}{h} = \frac{f(z+h)-f(z)}{h} + \frac{g(z+h)-g(z)}{h}$,

(2) $\frac{(f-g)(z+h)-(f-g)(z)}{h} = \frac{f(z+h)-f(z)}{h} - \frac{g(z+h)-g(z)}{h}$,

(3) $\frac{(f\cdot g)(z+h)-(f\cdot g)(z)}{h} = g(z)\frac{f(z+h)-f(z)}{h} + f(z+h)\frac{g(z+h)-g(z)}{h}$,

(4) $\frac{(\lambda f)(z+h)-(\lambda f)(z)}{h} = \lambda\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$.

Membrul drept al relaţiilor (1)-(4) are limită pentru $h \to 0$, deci membrul stâng al relaţiilor (1)-(4) are limită pentru $h \to 0$, ceea ce implică proprietatea $a)$ şi regulile de derivare $(r1)$-$(r4)$ din (i). Pentru a demonstra proprietatea $b)$ şi regula $(r5)$ din enunţ, fie $z \in D[f/g]$ şi $h \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ astfel încât $z + h \in D[f/g]$. Au loc relaţiile următoare:

(5) $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$,

(6) $\frac{\left(\frac{1}{g}\right)(z+h)-\left(\frac{1}{g}\right)(z)}{h} = -\frac{1}{g(z)} \cdot \frac{1}{g(z+h)} \cdot \frac{g(z+h)-g(z)}{h}$.

Membrul drept al relaţiei (6) are limită pentru $h \to 0$, deci membrul stâng al relaţiei (6) are limită pentru $h \to 0$, ceea ce implică proprietatea următoare:

(7) $\frac{1}{g} \in \mathcal{O}(D)$

şi următoarea regulă de derivare:

$(r7)$ $\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$.

Din $(5), (r7)$ şi regula de derivare din enunţ $(r3)$ stabilită anterior rezultă $b)$ şi $(r5)$. Deci [1.3 Teor. 3 (i)] are loc.

(ii) Fie $f \in \mathcal{O}(D)$ şi $g \in \mathcal{O}(E)$ cu $f : D \to E$ şi $g : E \to \mathbb{C}$. Presupunem că $z \in D$ şi $h \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ astfel încât $z + h \in D$. Atunci au loc relaţiile următoare:

$$\frac{(g\circ f)(z+h)-(g\circ f)(z)}{h} = \frac{g(f(z+h))-g(f(z))}{h} = \frac{f(z+h)-f(z)}{h} \cdot \frac{g(f(z+h))-g(f(z))}{f(z+h)-f(z)}.$$

Conform proprietăţii de continuitate a funcţiilor olomorfe pe care o vom stabili în paragraful următor, pentru $h \to 0$ rezultă $f(z+h) \to f(z)$. Prin trecere la limită pentru $h \to 0$ conform proprietăţilor limitelor de funcţii şi proprietăţii precedente rezultă că

$$\exists \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(z+h)-f(z)}{h} \cdot \frac{g(f(z+h))-g(f(z))}{f(z+h)-f(z)}\right] =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h} \cdot \lim_{h\to 0}\frac{g(f(z+h))-g(f(z))}{f(z+h)-f(z)} =$$

$f'(z) \cdot g'(f(z))$,
de unde obţinem că
$\exists \lim\limits_{h \to 0} \frac{(g \circ f)(z+h) - (g \circ f)(z)}{h} =$
$\lim\limits_{h \to 0} \left[\frac{f(z+h) - f(z)}{h} \cdot \frac{g(f(z+h)) - g(f(z))}{f(z+h) - f(z)} \right] =$
$f'(z) \cdot g'(f(z))$,
ceea ce implică proprietatea $g \circ f \in \mathcal{O}(D)$ şi regula de calcul $(r6)$. Prin urmare, [1.3 Teor. 3 (ii)] este de asemenea demonstrată.

În continuare introducem noţiunea de funcţie complexă $\mathbb{C}$-diferenţiabilă f pe o mulţime deschisă $D \subseteq \mathbb{C}$ care este echivalentă cu noţiunea de funcţie olomorfă. Se stabilesc apoi condiţiile necesare şi suficiente pentru a avea $f \in \mathcal{O}(D)$.

3.4 Funcţii complexe $\mathbb{C}$-diferenţiabile

Definiţia 1. O funcţie complexă $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ se numeşte
a) aditivă, dacă $\varphi(z + w) = \varphi(z) + \varphi(w), \forall z, w \in \mathbb{C}$,
b) $\mathbb{R}$-omogenă, dacă $\varphi(\lambda z) = \lambda\varphi(z), \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{C}$,
c) $\mathbb{C}$-omogenă, dacă $\varphi(\lambda z) = \lambda\varphi(z), \forall (\lambda, z) \in \mathbb{C}^2$,
d) $\mathbb{R}$-liniară, dacă este aditivă şi $\mathbb{R}$-omogenă,
e) $\mathbb{C}$-liniară, dacă este aditivă şi $\mathbb{C}$-omogenă.

Explicităm acum expresia funcţiilor K-liniare ($K = \mathbb{R}$ sau $K = \mathbb{C}$).

Propoziţia 2. Sunt îndeplinite condiţiile următoare, pentru orice funcţie complexă $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$:
(i) Funcţia φ este $\mathbb{R}$-liniară dacă şi numai dacă există o pereche de numere complexe $(a, b) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ astfel încât
$$\varphi(z) = ax + by, \forall z = x + iy \in \mathbb{C}.$$
(ii) Funcţia φ este $\mathbb{C}$-liniară dacă şi numai dacă există $\lambda \in \mathbb{C}$ astfel încât
$$\varphi(z) = \lambda z, \forall z \in \mathbb{C}.$$
(iii) Dacă φ este $\mathbb{R}$-liniară şi φ verifică (i) pentru $(a, b) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ atunci funcţia φ este $\mathbb{C}$-liniară dacă şi numai dacă $a + ib = 0$.

Demonstraţie. (i) Dacă φ este $\mathbb{R}$-liniară atunci φ verifică (i) pentru perechea $(a, b) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ cu $a = \varphi(1)$ şi $b = \varphi(i)$, deoarece în acest caz avem că pentru orice $z = x + iy \in \mathbb{C}$,
$\varphi(z) = \varphi(x + iy) = \varphi(x \cdot 1 + y \cdot i) = x\varphi(1) + y\varphi(i) = ax + by$.
Invers, dacă $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ este definită prin relaţia din (i) pentru $(a, b) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ atunci funcţia φ este $\mathbb{R}$-liniară, deoarece pentru orice $\lambda \in \mathbb{R}$, $z = x + iy \in \mathbb{C}$ şi $w = u + iv \in \mathbb{C}$ avem:
$\varphi(z + w) = a(x + u) + b(y + v) = (ax + by) + (au + bv) = \varphi(z) + \varphi(w)$;
$\varphi(\lambda z) = a(\lambda x) + b(\lambda y) = \lambda(ax + by) = \lambda\varphi(z)$.
(ii) Dacă φ este $\mathbb{C}$-liniară atunci φ verifică (ii) pentru $\lambda = \varphi(1)$, deoarece pentru orice $z \in \mathbb{C}$, $\varphi(z) = \varphi(z1) = z\varphi(1) = \lambda z$. Invers, dacă $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ este definită prin (ii) pentru $\lambda \in \mathbb{C}$ atunci φ este $\mathbb{C}$-liniară, deoarece în acest caz, pentru orice $\alpha, \beta, z, w \in \mathbb{C}$:
$\varphi(\alpha z + \beta w) = \lambda(\alpha z + \beta w) = \alpha(\lambda z) + \beta(\lambda w) = \alpha\varphi(z) + \beta\varphi(w)$.

(iii) Presupunem că φ verifică (i) cu $(a, b) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$. Dacă φ este $\mathbb{C}$-liniară atunci conform (ii) rezultă că există $\lambda \in \mathbb{C}$ astfel încât φ verifică în plus relaţia următoare, pentru orice $z = x + iy \in \mathbb{C}$:

$$\varphi(z) = \lambda z = \lambda x + (\lambda i)y,$$

deci în (i) avem $a = \lambda$ şi $b = \lambda i$, ceea ce implică $a + ib = \lambda + i(\lambda i) = 0$. Invers, să presupunem că perechea (a, b) din (i) satisface relaţia $a + ib = 0$. Deducem $b = ai$ şi conform (i) rezultă că pentru orice $z = x + iy \in \mathbb{C}$:

$$\varphi(z) = ax + by = ax + (ai)y = a(x + iy) = az,$$

deci φ verifică (ii) pentru $\lambda = a \in \mathbb{C}$, ceea ce înseamnă că φ este $\mathbb{C}$-liniară.

Prin intermediul noţiunilor de funcţie $\mathbb{R}$-liniară şi $\mathbb{C}$-liniară introducem în continuare noţiunile fundamentale de funcţie complexă $\mathbb{R}$-diferenţiabilă şi funcţie complexă $\mathbb{C}$-diferenţiabilă.

Definiţii 3. Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ o mulţime deschisă, $f : D \to \mathbb{C}$ o funcţie şi $z_0 \in D$.

(i) Funcţia f se numeşte $\mathbb{R}$-diferenţiabilă în punctul z_0 dacă există o funcţie $\mathbb{R}$-liniară, $d_{\mathbb{R}} f(z_0) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ numită $\mathbb{R}$-diferenţiala lui f în z_0, astfel încât:

$$\lim_{h \to 0} \frac{|f(z_0 + h) - f(z_0) - d_{\mathbb{R}} f(z_0)(h)|}{|h|} = 0.$$

(ii) Funcţia f se numeşte $\mathbb{C}$-diferenţiabilă în punctul z_0 dacă există o funcţie $\mathbb{C}$-liniară, $d_{\mathbb{C}} f(z_0) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ numită $\mathbb{C}$-diferenţiala lui f în z_0, astfel încât:

$$\lim_{h \to 0} \frac{|f(z_0 + h) - f(z_0) - d_{\mathbb{C}} f(z_0)(h)|}{|h|} = 0.$$

Propoziţia 4. Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ o mulţime deschisă şi $f = u + iv : D \to \mathbb{C}$ o funcţie de la D în $\mathbb{C}$. Pentru orice $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$, următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(i) Funcţia f este $\mathbb{R}$-diferenţiabilă în z_0.

(ii) Funcţia $(u, v) : D \to \mathbb{R}^2$ este $\mathbb{R}$-diferenţiabilă în $z_0 = (x_0, y_0)$.

Dacă f este $\mathbb{R}$-diferenţiabilă în z_0 atunci $\mathbb{R}$-diferenţiala lui f în z_0 se determină cu următoarea formulă, pentru orice $z = x + iy \in \mathbb{C}$:

$$d_{\mathbb{R}} f(z_0)(z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)y,$$

unde

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)\ ,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Demonstraţie. $(i) \Leftrightarrow (ii)$. Din [3.2 Prop. 2 (i) şi Def. 3 (i)] rezultă că proprietatea (i) este echivalentă cu condiţia că există o matrice reală

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

astfel încât pentru $a = a_1 + ia_2 \in \mathbb{C}$ şi $b = b_1 + ib_2 \in \mathbb{C}$ să avem

$$d_{\mathbb{R}} f(z_0)(h) = ah_1 + bh_2, \forall h = h_1 + ih_2 \in \mathbb{C} \text{ şi}$$
$$\lim_{h_1 + ih_2 \to 0} \frac{|f(z_0 + (h_1 + ih_2)) - f(z_0) - (ah_1 + bh_2)|}{|h_1 + ih_2|} = 0,$$

ceea ce este echivalent cu următoarea relaţie în $\mathbb{R}^2$:

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\left\| \begin{array}{c} (u,v)(x_0+h_1,y_0+h_2)-(u,v)(x_0,y_0)- \\ -\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}\right)^T \end{array} \right\|_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0.$$

Rezultă că într-adevăr echivalenţa $(i) \Leftrightarrow (ii)$ are loc. Din relaţia precedentă rezultă că dacă funcţia f este $\mathbb{R}$-diferenţiabilă atunci funcţia vectorială reală $(u,v): D \to \mathbb{R}^2$ este diferenţiabilă în punctul $z_0 = (x_0, y_0)$ având diferenţiala o funcţie $\mathbb{R}$-liniară $d_{\mathbb{R}}(u,v): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ care în raport cu baza canonică a lui $\mathbb{R}^2$ are matricea $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$, deci

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) & \dfrac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) & \dfrac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) \end{bmatrix}.$$

Deducem că formula de calcul din enunţ pentru $d_{\mathbb{R}}f(z_0)(z)$ are loc.

Propoziţia 5. Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ o mulţime deschisă şi $f = u+iv : D \to \mathbb{C}$ o funcţie de la D în $\mathbb{C}$. Pentru orice $z_0 \in D$, următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(i) Funcţia f este $\mathbb{C}$-diferenţiabilă în punctul z_0.

(ii) Există $\lambda \in \mathbb{C}$, $r \in (0, +\infty) \subseteq \mathbb{R}$ şi o funcţie $\omega_{z_0} : B_r(0) \to \mathbb{C}$ astfel încât

1) $f(z_0 + h) = f(z_0) + \lambda h + \omega_{z_0}(h), \forall h \in B_r(0)$,

2) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\omega_{z_0}(h)}{h} = 0$.

(iii) Funcţia f este olomorfă în punctul z_0.

Demonstraţie. $(i) \Rightarrow (ii)$. Presupunem că (i) are loc. Din [3.2 Prop. 2 (ii) şi Def. 3 (ii)] rezultă că există un număr complex $\lambda \in \mathbb{C}$ astfel încât

$$\lim_{h\to 0} \frac{|f(z_0+h) - f(z_0) - \lambda h|}{|h|} = 0.$$

Deoarece D este o mulţime deschisă şi $z_0 \in D$ rezultă că există $r \in (0, +\infty) \subseteq \mathbb{R}$ cu proprietatea că $B_r(z_0) \subseteq D$. Deducem că pentru orice $h \in B_r(0)$ avem $z_0 + h \in D$, deci există o funcţie $\omega_{z_0} : B_r(0) \to \mathbb{C}$ verificând

$$\omega_{z_0}(h) = f(z_0 + h) - f(z_0) - \lambda h, \forall h \in B_r(0),$$

ceea ce implică relaţiile 1) şi 2). Prin urmare (ii) are loc.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Presupunem că (ii) are loc. Rezultă că există $\lambda \in \mathbb{C}$ astfel încât

$$\lambda = \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h},$$

deci există derivata lui f în z_0 dată prin

$$f'(z_0) = \lambda.$$

Rezultă că (iii) are loc.

$(iii) \Rightarrow (i)$. Presupunem (iii). Conform relaţiei 1) rezultă că există o funcţie $\mathbb{C}$-liniară $d_{\mathbb{C}}f(z_0) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definită prin condiţia

$$d_{\mathbb{C}}f(z_0)(h) = f'(z_0)h, \forall h \in \mathbb{C},$$

care are proprietatea din [1.3 Def. 3 (ii)], deci (i) are loc.

Consecinţă 6. Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ o mulţime deschisă. Orice funcţie olomorfă pe D este o funcţie continuă pe D, deci are loc relaţia următoare de incluziune:

$$\mathcal{O}(D) \subseteq \mathcal{C}(D).$$

Demonstraţie. Fie $f \in \mathcal{O}(D)$ cu $f : D \to \mathbb{C}$ şi $z_0 \in D$. Din faptul că f este olomorfă în z_0 conform [1.3 Prop. 6 $(iii) \Leftrightarrow (ii)$] rezultă că există $r \in (0, +\infty) \subseteq \mathbb{R}$ şi o funcţie $\omega_{z_0} : B_r(0) \to \mathbb{C}$ astfel încât

$1')$ $f(z_0 + h) = f(z_0) + f'(z_0)\, h + h\frac{\omega_{z_0}(h)}{h}, \forall h \in B_r(0) \setminus \{0\}$,

2) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\omega_{z_0}(h)}{h} = 0.$

Relaţia $1')$ implică

$$f(z_0 + h) - f(z_0) = f'(z_0)\, h + h\frac{\omega_{z_0}(h)}{h}, \forall h \in B_r(0) \setminus \{0\}.$$

Prin trecere la limită în raport cu h, din relaţia precedentă utilizând 2) deducem următoarea proprietate:

$$\lim_{h \to 0} [f(z_0 + h) - f(z_0)] = \lim_{h \to 0} \left[f'(z_0)\, h + h\frac{\omega_{z_0}(h)}{h}\right] = 0,$$

deci $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$, de unde rezultă că f este continuă în punctul $z_0 \in D$. Prin urmare, am obţinut că $(\forall z_0 \in D)\, f$ este continuă în z_0, deci $f \in \mathcal{C}(D)$.

Proprietăţile anterioare împreună cu rezultatele preliminare prezentate în 3.2 implică următorul rezultat fundamental de caracterizare a funcţiilor olomorfe pe mulţimi deschise.

Teorema 7. (Cauchy-Riemann) Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ o mulţime deschisă în planul complex şi $f = u + iv : D \to \mathbb{C}$ o funcţie de la D în $\mathbb{C}$. Pentru orice punct $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$, următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(i) Funcţia f este olomorfă în z_0.

(ii) Funcţia vectorială reală $(u, v) : D \to \mathbb{R}^2$ este $\mathbb{R}$-diferenţiabilă în punctul $z_0 = (x_0, y_0) \in D$ astfel încât să fie satisfăcute ecuaţiile următoare:

$$\textbf{(CR)}\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\dfrac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \end{cases}.$$

Relaţiile (CR) se numesc ecuaţiile Cauchy-Riemann [3.2 Teor.1].

Demonstraţie. $(i) \Rightarrow (ii)$. Presupunem (i). Conform echivalenţei din [3.3 Prop. 5 $(i) \Leftrightarrow (iii)$] rezultă că funcţia f este $\mathbb{C}$-diferenţiabilă în punctul z_0, deci există o funcţie $\mathbb{C}$-liniară $d_{\mathbb{C}} f(z_0) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ cu proprietatea că

$$\lim_{h \to 0} \frac{|f(z_0 + h) - f(z_0) - d_{\mathbb{C}} f(z_0)(h)|}{|h|} = 0.$$

Din faptul că orice funcţie $\mathbb{C}$-liniară este $\mathbb{R}$-liniară rezultă că $d_{\mathbb{C}} f(z_0) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ este o funcţie $\mathbb{R}$-liniară, deci conform [1.3 Def. 3 (i)] f este $\mathbb{R}$-diferenţiabilă în punctul z_0 şi $d_{\mathbb{R}} f(z_0) = d_{\mathbb{C}} f(z_0)$. Conform [1.3 Prop. 4] de aici rezultă că funcţia $(u, v) : D \to \mathbb{R}^2$ este $\mathbb{R}$-diferenţiabilă în $z_0 = (x_0, y_0)$ şi în plus are loc relaţia următoare:

$$d_{\mathbb{R}} f(z_0)(z) = ax + by, \forall z = x + iy \in \mathbb{C},$$

unde $a = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ şi $b = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ sunt definite prin [1.3 Prop.4 (ii)]. Din relaţiile care definesc constantele a şi b şi faptul că funcţia $d_{\mathbb{R}} f(z_0)$ este în plus $\mathbb{C}$-liniară utilizând [1.3 Prop. 2 (iii)] rezultă că

$$a + ib = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) =$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)+i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)\right]+i\left[\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)+i\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)\right]=0.$$

Din relaţiile precedente rezultă (CR), deci (ii) are loc.

$(ii)\Rightarrow(i)$. Presupunem acum (ii). Din echivalenţa [1.3 Prop. 4 $(i)\Leftrightarrow(ii)$] rezultă că funcţia f este $\mathbb{R}$-diferenţiabilă în punctul z_0 şi $\mathbb{R}$-diferenţiala lui f în punctul z_0 este definită prin formula următoare:

$$d_{\mathbb{R}}f(z_0)(z)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)x+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)y,\ \forall z=x+iy\in\mathbb{C}.$$

Ecuaţiile Cauchy-Riemann (CR) sunt echivalente cu relaţia

(CR*) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)+i\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=0.$

Prin urmare, conform [1.3 Prop. 2 (iii)] din formula precedentă pentru calculul $\mathbb{R}$-diferenţialei $d_{\mathbb{R}}f(z_0)(z)$ şi (CR*) rezultă că funcţia

$$d_{\mathbb{C}}f(z_0)=d_{\mathbb{R}}f(z_0):\mathbb{C}\to\mathbb{C}$$

este $\mathbb{C}$-liniară şi

$$d_{\mathbb{C}}f(z_0)(z)=d_{\mathbb{R}}f(z_0)(z)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)z,\forall z=x+iy\in\mathbb{C}.$$

Deci funcţia f este $\mathbb{C}$-diferenţiabilă în punctul z_0. Din [1.3 Prop. 5 $(i)\Leftrightarrow(iii)$] şi relaţia precedentă deducem că f este olomorfă în z_0 şi are loc următoarea formulă de derivare a funcţiei $f=u+iv$ în funcţie de derivatele parţiale ale componentelor u şi v:

(FD) $f'(z_0)=\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)+i\dfrac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0),$

deci condiţia (i) are loc.

În continuare prezentăm o consecinţă a teoremei lui Lagrange din cazul funcţiilor reale definite pe un interval compact real $[a,b]\subseteq\mathbb{R}$ la cazul unor funcţii complexe netede $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$.

Propoziţia 8. Fie $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ o funcţie netedă pe $[a,b]\subseteq\mathbb{R}$, unde $-\infty<a<b<+\infty$. Este îndeplinită condiţia următoare:

$$(\exists t_0\in(a,b))\,|\gamma(a)-\gamma(b)|\le|\gamma'(t_0)|\,(b-a).$$

Demonstraţie. Presupunem că $\gamma=X+iY:[a,b]\to\mathbb{C}$ este netedă pe $[a,b]$. Dacă $\gamma(a)=\gamma(b)$ atunci inegalitatea din enunţ are loc pentru orice $t_0\in(a,b)$. Presupunem că $\gamma(a)\neq\gamma(b)$. Definim $\delta:[a,b]\to\mathbb{R}$ astfel:

$$\delta(t)=(X(b)-X(a))\,X(t)+(Y(b)-Y(a))\,Y(t)\,,\forall t\in[a,b].$$

Funcţia δ este o funcţie reală derivabilă pe $[a,b]$. Conform teoremei lui Lagrange rezultă că $(\exists t_0\in(a,b))\,\delta(b)-\delta(a)=\delta'(t_0)(b-a)$ ceea ce implică

$$(X(b)-X(a))^2+(Y(b)-Y(a))^2$$
$$=[(X(b)-X(a))\,X'(t_0)+(Y(b)-Y(a))\,Y'(t_0)]\,(b-a).$$

Din inegalitatea lui Cauchy-Schwarz aplicată membrului drept al identităţii precedente deducem inegalitatea următoare:

$$(X(b)-X(a))^2+(Y(b)-Y(a))^2$$
$$\le\sqrt{(X(b)-X(a))^2+(Y(b)-Y(a))^2}\sqrt{(X'(t_0))^2+(Y'(t_0))^2}\,(b-a),$$

ceea ce implică $|\gamma(a)-\gamma(b)|^2\le|\gamma(a)-\gamma(b)|\,|\gamma'(t_0)|\,(b-a)$, dar $\gamma(a)\neq\gamma(b)$, deci proprietatea din enunţ este complet verificată.

În propoziţia următoare se prezintă o inegalitate importantă satisfăcută de funcţiile olomorfe definite pe mulţimi deschise arbitrare numită *inegalitatea lui Lagrange pentru funcţii olomorfe*.

Propoziţia 9. Fie $f \in \mathcal{O}(D)$ şi $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ cu $z_1 \neq z_2$ două puncte în planul complex cu proprietatea că segmentul orientat de origine z_1 şi de extremitate z_2 este conţinut în D, deci

$[z_1, z_2] = \{(1-\lambda) z_1 + \lambda z_2 : \lambda \in [0,1] \subseteq \mathbb{R}\} \subseteq D$.

Atunci este îndeplinită condiţia următoare:

$(\exists \lambda_0 \in (0,1)) \, |f(z_2) - f(z_1)| \leq |f'((1-\lambda_0) z_1 + \lambda_0 z_2)| \, |z_2 - z_1|$.

Demonstraţie. Fie f, z_1, z_2 cu proprietăţile din enunţ. Definim o funcţie $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ astfel: $\gamma(\lambda) = f((1-\lambda) z_1 + \lambda z_2), \forall \lambda \in [0,1]$. Rezultă că γ este un drum neted cu mulţimea parametrilor $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$. Conform [3.3 Prop. 8] rezultă că există $\lambda_0 \in (0,1)$ astfel încât $|\gamma(1) - \gamma(0)| \leq |\gamma'(\lambda_0)|$, dar $\gamma(0) = f(z_1), \gamma(1) = f(z_2)$ şi $\gamma'(\lambda_0) = f'((1-\lambda_0) z_1 + \lambda_0 z_2)(z_2 - z_1)$, deci inegalitatea din enunţ are loc.

Din propoziţia precedentă rezultă următoarea teoremă în care se prezintă o caracterizare a funcţiilor olomorfe definite pe un domeniu D în planul complex având derivata identic nulă pe D.

Teorema 10. Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ un domeniu, deci D este o mulţime deschisă şi conexă în planul complex. Pentru orice funcţie olomorfă $f \in \mathcal{O}(D)$, următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(i) $(\forall z \in D) \, f'(z) = 0$;

(ii) $(\exists c \in \mathbb{C}) (\forall z \in D) \, f(z) = c$.

Demonstraţie. $(ii) \Rightarrow (i)$ Presupunem (ii). Rezultă că

$(\forall z \in D) \, \exists f'(z) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{c-c}{h} = 0$, deci (i) are loc.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Presupunem (i). Fie $z_0 \in D$ un punct fixat în domeniul D. Definim submulţimea următoare a lui D:

$$S = \{z \in D : f(z) = f(z_0)\}.$$

Arătăm că S satisface condiţiile următoare:

$c1)$ S este o mulţime închisă în $\mathbb{C}$;

$c2)$ S este o mulţime deschisă în $\mathbb{C}$.

Verificare $c1)$. Fie $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un şir convergent de elemente din S cu $z_n \to a$. Din ipoteza că $f \in \mathcal{O}(D)$ rezultă că f este continuă pe D, deci $f(z_n) \to f(a)$, dar $(\forall n \in \mathbb{N}) \, z_n \in S$, deci conform definiţiei lui S rezultă

$(\forall n \in \mathbb{N}) \, f(z_n) = f(z_0)$,

ceea ce implică $f(a) = f(z_0)$, deci $a \in S$. Prin urmare, orice şir convergent de elemente din S are limita în S, deci $adh(S) = S$, de unde deducem $c1)$.

Verificare $c2)$. Fie $u_0 \in S \subseteq D$. Din faptul că D este o mulţime deschisă în $\mathbb{C}$ rezultă că există $r \in \mathbb{R}_+^*$ astfel încât $D_r(u_0) \subseteq D$. Pentru orice $u \in D_r(u_0)$, avem $[u_0, u] \subseteq D_r(u_0)$, deci $[u_0, u] \subseteq D$. Conform [3.3 Prop. 9] rezultă că există $\lambda_0 \in (0,1)$ astfel încât

$|f(u) - f(u_0)| \leq |f'((1-\lambda_0) u_0 + \lambda_0 u)| \, |u - u_0|$,

de unde conform ipotezei (i) rezultă $|f(u) - f(u_0)| = 0$, ceea ce implică $f(u) = f(u_0) = f(z_0)$, deci $u \in S$. Astfel am obţinut că

$(\forall u_0 \in S)\left(\exists r \in \mathbb{R}_+^*\right) D_r\left(u_0\right) \subseteq S,$
de unde rezultă $c2$).

Din condiţiile $c1$) şi $c2$) împreună cu relaţiile
$S \cup (D \setminus S) = D$ şi $S \cap (D \setminus S) = \emptyset,$
utilizând proprietăţile $S \neq \emptyset\ (z_0 \in S)$ şi D conexă rezultă în mod necesar $S = D$. Din definiţia lui S rezultă (ii) pentru $c = f\left(z_0\right)$.

Definiţia 11. Fie $P : D \to \mathbb{R}$ cu $D \subseteq \mathbb{R}^2$ deschisă. Spunem că P este o *funcţie armonică* pe D dacă P are derivate parţiale de ordinul al doilea continue pe D astfel încât $\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(x, y) = 0, \forall\, (x, y) \in D.$

Teorema 12. Dacă $f = u + iv : D \to \mathbb{C}$ este o funcţie olomorfă pe mulţimea deschisă D atunci funcţiile reale $u = \operatorname{Re} f : D \to \mathbb{R}$ şi $v = \operatorname{Im} f : D \to \mathbb{R}$ sunt funcţii armonice pe D, deci au loc relaţiile:
$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0$ şi $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x, y) = 0, \forall\, (x, y) \in D.$

Comentarii. Teorema 12 afirmă că partea reală u şi partea imaginară v ale unei funcţii olomorfe $f = u + iv \in \mathcal{O}(D)$ au proprietatea $u, v \in C^2(D)$. Din studiul funcţiilor olomorfe rezultă că funcţiile reale respective au proprietatea $u, v \in C^\infty(D)$, adică au derivate parţiale de orice ordin continue pe D. În conexiune cu funcţiile armonice, are loc următoarea reciprocă a teoremei 12: dacă $u : D \to \mathbb{R}$ este o funcţie armonică pe D, atunci există funcţii olomorfe $f \in \mathcal{O}(D)$ astfel încât $u = \operatorname{Re} f$. De asemenea, dacă $v : D \to \mathbb{R}$ este o funcţie armonică pe D, atunci există funcţii olomorfe $g \in \mathcal{O}(D)$ astfel încât $v = \operatorname{Im} g$. Construcţia funcţiilor olomorfe $f \in \mathcal{O}(D)$, respectiv $g \in \mathcal{O}(D)$ menţionate anterior, se bazează pe aplicarea ecuaţiilor Cauchy-Riemann (CR).

3.5 Funcţii elementare olomorfe şi reguli de derivare

În continuare prezentăm un set de exerciţii prin care sunt furnizate diverse exemple de funcţii elementare olomorfe împreună cu proprietăţi esenţiale ale acestora şi reguli de derivare obţinute din rezultatele precedente.

Exerciţiu 1. Să se demonstreze că următoarele funcţii $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sunt olomorfe pe $\mathbb{C}$ şi să se determine derivatele lor:

(i) $f = P_n[a]$, $\forall n \in \mathbb{N}$ şi $\forall a = (a_0, a_1, ..., a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ (funcţia polinomială analitică de grad n), adică

$$(\forall z \in \mathbb{C})\, f(z) = P_n[a](z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + ... + a_n;$$

(ii) $f(z) = e^z$, $\forall z \in \mathbb{C}$ (funcţia exponenţială complexă);
(iii) $a)$ $f(z) = \sin z$, $\forall z \in \mathbb{C}$ (funcţia sinus complex);
$b)$ $f(z) = \cos z$, $\forall z \in \mathbb{C}$ (funcţia cosinus complex).
(iv) $a)$ $f(z) = \sinh z$, $\forall z \in \mathbb{C}$ (funcţia sinus hiperbolic complex);
$b)$ $f(z) = \cosh z$, $\forall z \in \mathbb{C}$ (funcţia cosinus hiperbolic complex).

Rezolvare. (i) Utilizând definiţia noţiunii de funcţie olomorfă rezultă că pentru orice $m \in \mathbb{N}$ şi $z \in \mathbb{C}$ au loc relaţiile următoare:

$$\lim_{h \to 0} \frac{(z+h)^m - z^m}{h} = \lim_{h \to 0} \left(m z^{m-1} + h T(z, h)\right) = m z^{m-1},$$

deci funcţia putere $p_m(z) = z^m, \forall z \in \mathbb{C}$ este olomorfă şi

$p'_m(z) = (z^m)' = mz^{m-1}, \forall z \in \mathbb{C}$.
Funcţia constantă egală cu $1, k_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ cu $k_1(z) = 1, \forall z \in \mathbb{C}$ este olomorfă cu derivata nulă pe $\mathbb{C}, k'_1(z) = 0, \forall z \in \mathbb{C}$. Din definiţia funcţiei polinomiale complexe $P_n[a]$ rezultă:

$P_n[a](z) = a_0 p_n(z) + a_1 p_{n-1}(z) + ... + a_{n-1} p_1(z) + a_n k_1(z), \forall z \in \mathbb{C}$.

Conform [3.2 Teor. 3] din relaţia precedentă utilizând regulile de derivare ale funcţiilor olomorfe $p_n, p_{n-1}, ..., p_1, k_1$ stabilite anterior, deducem proprietatea $P_n[a] \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ şi faptul că derivata $P'_n[a] : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ este dată prin:

$P'_n[a](z) = a_0 n z^{n-1} + a_1 (n-1) z^{n-2} + ... + a_{n-1}$.

(ii) Fie $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Conform definiţiei funcţiei exponenţiale complexe rezultă:

$f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y) = e^x \cos y + ie^x \sin y$,

deci $f = u + iv$ cu $u = \operatorname{Re} f$ şi $v = \operatorname{Im} f$, astfel încât

$u(x, y) = e^x \cos y$ şi $v(x, y) = e^x \sin y$.

Avem $u, v \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ şi în plus sunt satisfăcute ecuaţiile Cauchy-Riemann:

$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(e^x \cos y) = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y)$;

$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(e^x \cos y) = -e^x \sin y = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y)$.

deci f este olomorfă pe $\mathbb{C}$. Din demonstraţia teoremei Cauchy-Riemann rezultă următoarea regulă de derivare a unei funcţii olomorfe $f = u + iv$:

$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x, y)$,

deci în cazul funcţiei exponenţiale rezultă

$f'(z) = (e^z)' = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z$.

(iii) $a)$ Din definiţia funcţiei sinus complex rezultă

$f(z) = \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \forall z \in \mathbb{C}$.

Din rezultatele precedente (i) şi (ii) utilizând proprietăţile funcţilor olomorfe [3.2 Teor. 3] deducem că f este olomorfă şi au loc relaţiile următoare:

$f'(z) = (\sin z)' = \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)' =$

$\frac{1}{2i}\left[\left(e^{iz}\right)' - \left(e^{-iz}\right)'\right] = \frac{1}{2i}\left[ie^{iz} - (-i)e^{-iz}\right] =$

$\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z$.

$b)$ Din definiţia funcţiei cosinus complex rezultă

$f(z) = \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \forall z \in \mathbb{C}$.

Din rezultatele precedente (i) şi (ii) utilizând proprietăţile funcţilor olomorfe [3.2 Teor. 3] deducem că f este olomorfă şi au loc relaţiile următoare:

$f'(z) = (\cos z)' = \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)' =$

$\frac{1}{2}\left[\left(e^{iz}\right)' + \left(e^{-iz}\right)'\right] = \frac{1}{2}\left[ie^{iz} + (-i)e^{-iz}\right] =$

$\frac{i\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)}{2} = -\sin z$.

(iv) $a)$ Din definiţia funcţiei sinus hiperbolic complex rezultă

$f(z) = \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \forall z \in \mathbb{C}$.

Din rezultatele precedente (i) şi (ii) utilizând proprietăţile funcţilor olomorfe [3.2 Teor. 3] deducem că f este olomorfă şi au loc relaţiile următoare:

$f'(z) = (\sinh z)' = \left(\frac{e^z - e^{-z}}{2}\right)' =$

$\frac{1}{2}\left[(e^z)' - (e^{-z})'\right] = \frac{1}{2}\left[e^z - (-e^{-z})\right] =$
$\frac{e^z+e^{-z}}{2} = \cosh z.$

b) Din definiţia funcţiei cosinus hiperbolic complex rezultă
$f(z) = \cosh z = \frac{e^z+e^{-z}}{2}, \forall z \in \mathbb{C}.$
Din rezultatele precedente (*i*) şi (*ii*) utilizând proprietăţile funcţilor olomorfe [3.2 Teor. 3] deducem că f este olomorfă şi au loc relaţiile următoare:
$f'(z) = (\cosh z)' = \left(\frac{e^z+e^{-z}}{2}\right)' =$
$\frac{1}{2}\left[(e^z)' + (e^{-z})'\right] = \frac{1}{2}\left[e^z + (-e^{-z})\right] =$
$\frac{e^z-e^{-z}}{2} = \sinh z.$

Exerciţiu 2. Funcţia exponenţială are următoarele proprietăţi:
(*i*) $e^0 = 1$;
(*ii*) $e^{z+w} = e^z e^w, \forall z, w \in \mathbb{C}$;
(*iii*) $e^{z-w} = \frac{e^z}{e^w}, \forall z, w \in \mathbb{C}$;
(*iv*) $e^z \neq 0, \forall z \in \mathbb{C}$;
(*v*) $|e^z| = e^{\mathrm{Re}\, z}, \forall z \in \mathbb{C}$.

Rezolvare. Utilizăm forma algebrică a funcţiei exponenţiale complexe:
$(\forall z = x + iy \in \mathbb{C})\, e^z = e^x \cos y + ie^x \sin y.$
(*i*) Avem $e^0 = e^0 \cos 0 + ie^0 \sin 0 = 1$.
(*ii*) Fie $z = x + iy$ şi $w = u + iv$. Rezultă că $z + w = (x + u) + i(y + v)$, deci
$e^{z+w} = e^{x+u} \cos(y + v) + ie^{x+u} \sin(y + v),$
$e^z e^w = (e^x \cos y + ie^x \sin y)(e^u \cos v + ie^u \sin v) =$
$e^{x+u}(\cos y \cos v - \sin y \sin v) + ie^{x+u}(\sin y \cos v + \sin v \cos y),$
de unde rezultă că relaţia (*ii*) are loc.
(*iii*) Fie $z = x + iy$ şi $w = u + iv$. Rezultă că $z - w = (x - u) + i(y - v)$, deci au loc relaţiile următoare:
$e^{z-w} = e^{x-u} \cos(y - v) + ie^{x-u} \sin(y - v),$
$\frac{e^z}{e^w} = \frac{e^x \cos y + ie^x \sin y}{e^u \cos v + ie^u \sin v} = \frac{(e^x \cos y + ie^x \sin y)(e^u \cos v - ie^u \sin v)}{e^u} =$
$e^{x-u}(\cos y + i \sin y)(\cos v - i \sin v) =$
$e^{x-u}(\cos y \cos v + \sin y \sin v) + ie^{x-u}(\sin y \cos v - \sin v \cos y),$
de unde rezultă că identitatea (*iii*) are loc.
(*iv*) Dacă $z = x + iy$ atunci $e^z = e^x \cos y + ie^x \sin y$. Din $e^z = 0$ rezultă $e^x \cos y = 0$ şi $e^x \sin y = 0$, deci $\cos y = 0 = \sin y$, dar $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$, contradicţie. Rezultă că proprietatea (*iv*) din enunţ are loc.
(*v*) Dacă $z = x + iy$ atunci $e^z = e^x \cos y + ie^x \sin y$, deci:
$|e^z| = \sqrt{(e^x \cos y)^2 + (e^x \sin y)^2} =$
$e^x \sqrt{\cos^2 y + \sin^2 y} = e^x = e^{\mathrm{Re}\, z}.$

Exerciţiu 3. Funcţiile trigonometrice complexe sinus şi cosinus satisfac următoarele relaţii, pentru orice $z, w \in \mathbb{C}$:
(*i*) $\sin(z \pm w) = \sin z \cos w \pm \sin w \cos z$;
(*ii*) $\cos(z \pm w) = \cos z \cos w \mp \sin z \sin w$;
(*iii*) $\sin(iz) = i \sinh z$;
(*iv*) $\cos(iz) = \cosh z$.

Utilizând aceste proprietăţi să se determine forma algebrică a funcţiilor trigonometrice şi hiperbolice sinus şi cosinus împreună cu formulele de calcul ale modulului acestor funcţii.

Rezolvare. Fie $z, w \in \mathbb{C}$. Relaţiile $(i) - (iv)$ se obţin prin calcul direct pe baza definiţiilor funcţiilor implicate utilizând proprietăţile funcţiei exponenţiale din [3.4 Ex. 2]. Pentru ilustrare verificăm una din identităţile (i). Au loc relaţiile următoare:

$\sin(z+w) = \frac{e^{i(z+w)} - e^{-i(z+w)}}{2i} =$
$\frac{e^{iz}e^{iw} - \frac{1}{e^{iz}e^{iw}}}{2i} =$
$\frac{e^{2iz}e^{2iw} - 1}{2ie^{iz}e^{iw}}$.

De asemenea pornind din membrul drept avem:

$\sin z \cos w + \sin w \cos z =$
$\frac{\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)\left(e^{iw} + e^{-iw}\right)}{4i} + \frac{\left(e^{iw} - e^{-iw}\right)\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)}{4i} =$
$\frac{\left(e^{2iz} - 1\right)\left(e^{2iw} + 1\right) + \left(e^{2iz} + 1\right)\left(e^{2iw} - 1\right)}{4ie^{iz}e^{iw}} =$
$\frac{2\left(e^{2iz}e^{2iw} - 1\right)}{4ie^{iz}e^{iw}} = \frac{e^{2iz}e^{2iw} - 1}{2ie^{iz}e^{iw}}$,

deci conform relaţiilor stabilite anterior obţinem:

$\sin(z+w) = \sin z \cos w + \sin w \cos z$.

În mod similar rezultă celelalte identităţi.

Determinăm în continuare forma algebrică a funcţiilor respective şi expresia modulului acestora. Fie $z = x + iy$. Conform [3.4 Ex. 3 $(i) - (iv)$] rezultă:

$\sin z = \sin(x+iy) =$
$\sin x \cos(iy) + \sin(iy) \cos x =$
$\sin x \cosh y + i \sinh y \cos x$,
deci
$|\sin z| = \sqrt{\sin^2 x \cosh^2 y + \sinh^2 y \cos^2 x}, \forall z = x + iy \in \mathbb{C}$;
$\cos z = \cos(x+iy) =$
$\cos x \cos(iy) - \sin x \sin(iy) =$
$\cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$,
deci
$|\cos z| = \sqrt{\cos^2 x \cosh^2 y + \sin^2 x \sinh^2 y}, \forall z = x + iy \in \mathbb{C}$;
$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} =$
$\frac{e^{2z} - 1}{2e^z} = \frac{e^{2x}(\cos(2y) + i\sin(2y)) - 1}{2e^x(\cos y + i \sin y)} =$
$\frac{\left(\left(e^{2x}\cos(2y) - 1\right) + i\sin(2y)\right)(\cos y - i \sin y)}{2e^x} =$
$\frac{\cos y\left(e^{2x}\cos(2y) - 1\right) + \sin y \sin(2y)}{2e^x} + i\frac{\cos y \sin(2y) - \sin y\left(e^{2x}\cos(2y) - 1\right)}{2e^x}$,
deci
$|\sinh z| = \frac{1}{2e^x}\sqrt{[\alpha(x,y)]^2 + [\beta(x,y)]^2}$,
unde
$\alpha(x,y) = \cos y\left(e^{2x}\cos(2y) - 1\right) + \sin y \sin(2y)$,
$\beta(x,y) = \cos y \sin(2y) - \sin y\left(e^{2x}\cos(2y) - 1\right)$;
$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} =$
$\frac{e^{2z} + 1}{2e^z} = \frac{e^{2x}(\cos(2y) + i\sin(2y)) + 1}{2e^x(\cos y + i \sin y)} =$

$\frac{\left(\left(e^{2x}\cos(2y)+1\right)+i\sin(2y)\right)(\cos y-i\sin y)}{2e^x}=$
$\frac{\cos y\left(e^{2x}\cos(2y)+1\right)+\sin y\sin(2y)}{2e^x}+i\frac{\cos y\sin(2y)-\sin y\left(e^{2x}\cos(2y)+1\right)}{2e^x}$,
deci
$|\cosh z|=\frac{1}{2e^x}\sqrt{\left[\gamma\left(x,y\right)\right]^2+\left[\delta\left(x,y\right)\right]^2}$,
unde
$\gamma\left(x,y\right)=\cos y\left(e^{2x}\cos\left(2y\right)+1\right)+\sin y\sin\left(2y\right)$,
$\delta\left(x,y\right)=\cos y\sin\left(2y\right)-\sin y\left(e^{2x}\cos\left(2y\right)+1\right)$.

Exerciţiu 4. Să se demonstreze următoarele proprietăţi:
(i) $\sin z=0\Leftrightarrow(\exists k\in\mathbb{Z})\,z=k\pi$;
(ii) $\cos z=0\Leftrightarrow(\exists k\in\mathbb{Z})\,z=(2k+1)\,\frac{\pi}{2}$;
(iii) $\sinh z=0\Leftrightarrow(\exists k\in\mathbb{Z})\,z=ik\pi$;
(iv) $\cosh z=0\Leftrightarrow(\exists k\in\mathbb{Z})\,z=i\,(2k+1)\,\frac{\pi}{2}$.

Exerciţiu 5. Să se demonstreze că următoarele funcţii sunt olomorfe pe domeniul lor de definiţie şi să se calculeze derivatele lor:
(i) $f\left(z\right)=\tan z=\frac{\sin z}{\cos z},\forall z\in\mathbb{C}\setminus Z\left(\cos\right)$, unde
$Z\left(\cos\right)=\left\{z\in\mathbb{C}:\cos z=0\right\}$;
(ii) $f\left(z\right)=\cot z=\frac{\cos z}{\sin z},\forall z\in\mathbb{C}\setminus Z\left(\sin\right)$, unde
$Z\left(\sin\right)=\left\{z\in\mathbb{C}:\sin z=0\right\}$;
(iii) $f\left(z\right)=\tanh z=\frac{\sinh z}{\cosh z},\forall z\in\mathbb{C}\setminus Z\left(\cosh\right)$, unde
$Z\left(\cosh\right)=\left\{z\in\mathbb{C}:\cosh z=0\right\}$;
(iv) $f\left(z\right)=\coth z=\frac{\cosh z}{\sinh z},\forall z\in\mathbb{C}\setminus Z\left(\sinh\right)$, unde
$Z\left(\sinh\right)=\left\{z\in\mathbb{C}:\sinh z=0\right\}$.

Exerciţiu 6. Să se demonstreze următoarele proprietăţi de periodicitate a următoarelor funcţii complexe:
(i) $\sin z$ şi $\cos z$ sunt funcţii periodice cu perioada $T=2\pi$;
(ii) $e^{z+2k\pi i}=e^z,\forall k\in\mathbb{Z},\forall z\in\mathbb{C}$;
(iii) $\cosh\left(z+2\pi i\right)=\cosh z,\forall z\in\mathbb{C}$;
(iv) $\sinh\left(z+2\pi i\right)=\sinh z,\forall z\in\mathbb{C}$.

Exerciţiu 7. Să se calculeze părţile reală şi imaginară ale următoarelor numere complexe: $a)$ e^{2z} $b)$ e^{z^2} $c)$ e^{e^z}.

Exerciţiu 8. Să se rezolve ecuaţiile următoare:
(i) $\cosh z=-1$ (ii) $\cos^2 z=4$ (iii) $\tan z=i$.

Exerciţiu 9. Să se determine mulţimea zerourilor
$Z\left(f\right)=\left\{z\in\mathbb{C}:f\left(z\right)=0\right\}$
unde $f\left(z\right)$ este definit respectiv prin:
(i) $\left(z^4-1\right)\sin\left(\pi z\right)$ (ii) $\cosh^2 z$ (iii) $1+e^{2z}$
(iv) $\sin^3\left(\frac{1}{z}\right)$ cu $z\neq 0$ (v) $1-e^{z^2}$ (vi) $1+e^{z^2}$.

Exerciţiu 10. Să se determine următoarele mulţimi de numere complexe:
(i) $Arg(-1)$ (ii) $Arg(1-i)$ (iii) $Arg(e^{-\frac{2\pi i}{3}})$
(iv) $\left(\sqrt{2}\right)^i$ (v) $i^{\sqrt{2}}$ (vi) i^i (vii) $e^{i\pi}$.

Exerciţiu 11. Fie $z,w\in\mathbb{C}$. Să se demonstreze următoarele proprietăţi:
(i) $\sin w=z\Leftrightarrow w\in -iLn\left(\left[iz+\left(1-z^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]\right)$;

(ii) $\cos w = z \Leftrightarrow w \in -iLn\left(\left[z + i\left(1 - z^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]\right)$;

(iii) $\tan w = z \Leftrightarrow w \in \frac{i}{2}Ln\left(\frac{i+z}{i-z}\right)$.

Proprietăţile precedente furnizează expresia funcţiilor trigonometrice inverse arcsin, arccos şi arctan.

Exerciţiu 12. Fie $z, w \in \mathbb{C}$. Să se demonstreze următoarele proprietăţi:

(i) $\sinh w = z \Leftrightarrow w \in Ln\left(\left[z + \left(z^2 + 1\right)^{\frac{1}{2}}\right]\right)$;

(ii) $\cosh w = z \Leftrightarrow w \in Ln\left(\left[z + \left(z^2 - 1\right)^{\frac{1}{2}}\right]\right)$;

(iii) $\tanh w = z \Leftrightarrow w \in \frac{1}{2}Ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$.

Proprietăţile precedente furnizează expresia funcţiilor hiperbolice inverse $Arc\sinh$, $Arc\cosh$ şi $Arc\tanh$.

4 INTEGRAREA FUNCŢIILOR COMPLEXE

În acest paragraf se introduce noţiunea de funcţie complexă integrabilă pe un drum. Se prezintă teorema lui Cauchy şi teorema integrală a lui Cauchy privind integrala pe drumuri în planul complex.

4.1 Integrala pe drumuri

Definiţia 1. Fie $D \subseteq \mathbb{C}$, $f : D \to \mathbb{C}$ o funcţie complexă şi $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ un drum parametrizat neted pe porţiuni cu suportul $\Gamma = \gamma([a, b]) \subseteq D$, deci parametrizarea γ este o funcţie netedă pe porţiuni cu $\gamma : [a, b] \to D$. Funcţia f se numeşte *integrabilă pe* γ dacă există integrala $\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt$. În acest caz, notăm integrală precedentă prin $\int_\gamma f(z)\,dz$, deci

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt \in \mathbb{C}$$

Numărul complex $\int_\gamma f(z)\,dz$ se numeşte integrala lui f pe γ sau în lungul lui Γ.

Comentariu. În definiţia precedentă, existenţa integralei $\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt$ înseamnă că funcţia complexă de o variabilă reală $(f \circ \gamma) \cdot \gamma' : [a, b] \to \mathbb{C}$ este integrabilă pe $[a, b]$, adică ambele funcţii reale de o variabilă reală

$A = \operatorname{Re}(f \circ \gamma) \cdot \gamma' : [a, b] \to \mathbb{R}$ şi $B = \operatorname{Im}(f \circ \gamma) \cdot \gamma' : [a, b] \to \mathbb{R}$

sunt integrabile pe $[a, b]$ şi în acest caz

$$\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt = \int_a^b A(t)\,dt + i\int_a^b B(t)\,dt.$$

Propoziţia 2. Dacă $f = u + iv : \Gamma \to \mathbb{C}$ este o funcţie continuă atunci funcţia f este integrabilă pe orice drum neted pe porţiuni $\gamma : [a,b] \to D$ şi are loc relaţia următoare:

$$(I_\gamma)\ \int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma u(x,y)\,dx - v(x,y)\,dy + i\int_\gamma v(x,y)\,dx + u(x,y)\,dy.$$

Demonstraţie. Presupunem că drumul γ din enunţ este definit prin relaţia următoare:

$$\gamma(t) = x(t) + iy(t), \forall t \in [a,b].$$

Din faptul că $f : \Gamma \to \mathbb{C}$ este continuă rezultă că funcţia

$$(f \circ \gamma) \cdot \gamma' : [a,b] \to \mathbb{C}$$

este integrabilă pe $[a,b]$. Conform 4.1 Def. 1 rezultă următoarele relaţii:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt = \int_a^b f(x(t) + iy(t))(x'(t) + iy'(t))\,dt,$$

dar funcţia de sub semnul integralei precedente verifică

$$f(x(t) + iy(t))(x'(t) + iy'(t)) =$$
$$(u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t)))(x'(t) + iy'(t)) =$$
$$(u(x(t), y(t))x'(t) - v(x(t), y(t))y'(t)) +$$
$$i(v(x(t), y(t))x'(t) + u(x(t), y(t))y'(t)),$$

deci are loc relaţia următoare:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b (u(x(t), y(t))x'(t) - v(x(t), y(t))y'(t))\,dt +$$
$$i\int_a^b (v(x(t), y(t))x'(t) + u(x(t), y(t))y'(t))\,dt,$$

de unde rezultă formula din enunţ.

Comentarii. Integralele din membrul drept al formulei (I) din propoziţia precedentă sunt integrale curbilinii reale de speţa a doua pe γ corespunzătoare formelor diferenţiale

$$u(x,y)\,dx - v(x,y)\,dy \text{ şi } v(x,y)\,dx + u(x,y)\,dy.$$

Expresiile acestor forme diferenţiale se pot obţine prin aplicarea următoarelor reguli de calcul simbolic: dacă $z = x + iy \in \mathbb{C}$, atunci definim $dz = dx + idy$, $f(z)\,dz = (u(x,y) + iv(x,y))(dx + idy)$ şi evaluăm membrul drept al relaţiei precedente cu regulile uzuale de calcul simbolic în $\mathbb{C}$. Obţinem următoarea formulă de calcul simbolic:

$$f(z)\,dz = (u(x,y)\,dx - v(x,y)\,dy) + i(v(x,y)\,dx + u(x,y)\,dy).$$

Exerciţiu 3. Fie $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$ şi $\gamma_r(a) : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ conturul circular de centru a şi de rază r, cu $\gamma_r(a)(t) = a + re^{it}$, $\forall t \in [0, 2\pi]$. Să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{Z}$, are loc relaţia următoare:

$$\int\limits_{\gamma_r(a)} (z-a)^n \, dz = \begin{cases} 0 & \text{dacă} \quad n \neq -1 \\ 2\pi i & \text{dacă} \quad n = -1 \end{cases}.$$

Rezolvare. Fie $n \in \mathbb{Z}$. Funcţia de integrat pe conturul respectiv este $f : C_r(a) \to \mathbb{C}$ cu $f(z) = (z-a)^n$, $\forall z \in im(\gamma_r(a)) = C_r(a)$. Rezultă

$$I_n(a) = \int\limits_{\gamma_r(a)} (z-a)^n \, dz = \int\limits_0^{2\pi} [\gamma_r(a)(t) - a]^n \, [\gamma_r(a)]'(t) \, dt,$$

deci

$$I_n(a) = \int\limits_0^{2\pi} \left(re^{it}\right)^n rie^{it} dt = ir^{n+1} \int\limits_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt.$$

Dacă $n = -1$ atunci $I_n(a) = ir^0 \int\limits_0^{2\pi} dt = 2\pi i$. Dacă $n \neq -1$ atunci

$$I_n(a) = ir^{n+1} \tfrac{1}{i(n+1)} \left[e^{i(n+1)2\pi} - e^{i(n+1)0}\right] = \tfrac{r^{n+1}}{n+1} [1-1] = 0,$$

deoarece $(\forall k \in \mathbb{Z}) \, e^{2k\pi i} = 1$. Prin urmare, relaţia din enunţ are loc.

Exerciţiu 4. Să se calculeze $\int\limits_\gamma z^2 dz$ în următoarele cazuri:

a) $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ cu
$\gamma(t) = (1-t)(-r) + tr = (2t-1)r$, $\forall t \in [0, 1]$;

b) $\gamma : [0, \pi] \to \mathbb{C}$ cu
$\gamma(t) = re^{it}, \forall t \in [0, \pi]$.

Rezolvare. *a)* În acest caz rezultă

$$\int\limits_\gamma z^2 dz = \int\limits_0^1 [(2t-1)r]^2 \, 2rdt = \left[2r^3 \left(\tfrac{4}{3}t^3 - 2t^2 + t\right)\right]_0^1 = \tfrac{2r^3}{3}.$$

b) În acest caz rezultă

$$\int\limits_\gamma z^2 dz = \int\limits_0^\pi \left(re^{it}\right)^2 rie^{it} dt = r^3 \left[\tfrac{1}{3} e^{3it}\right]_0^\pi = -\tfrac{2r^3}{3}.$$

Definiţia 5. Fie $f : D \to \mathbb{C}$, $\gamma = \left(\gamma_j : [a_j, b_j] \to D\right)_{j=\overline{1,n}}$ o familie de drumuri netede pe porţiuni în $D \subseteq \mathbb{C}$. Funcţia f se numeşte *integrabilă pe* γ dacă f este integrabilă pe γ_j, pentru orice $j \in \{1, 2, ..., n\}$, deci există $\int\limits_{\gamma_j} f(z) \, dz$, pentru orice $j \in \{1, 2, ..., n\}$. In acest caz notăm

$$\int\limits_\gamma f(z) \, dz = \sum_{j=1}^n \int\limits_{\gamma_j} f(z) \, dz.$$

Definiţii 6. Fie $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ un drum parametrizat neted pe porţiuni cu mulţimea suport Γ.

(i) *Lungimea drumului* γ este numărul real $l(\gamma) \in \mathbb{R}_+$ definit astfel:

$$l(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt.$$

(ii) Drumul $\widetilde{\gamma} : \left[\widetilde{a}, \widetilde{b}\right] \to \mathbb{C}$ se obţine din drumul γ printr-o reparametrizare netedă strict crescătoare $\rho : \left[\widetilde{a}, \widetilde{b}\right] \to [a, b]$, dacă $\widetilde{\gamma} = \gamma \circ \rho$, unde ρ este o funcţie derivabilă cu derivata continuă pe intervalul $\left[\widetilde{a}, \widetilde{b}\right]$ cu proprietatea că $\left(\forall t \in \left[\widetilde{a}, \widetilde{b}\right]\right) \rho'(t) > 0$.

(iii) Dacă drumul $\widetilde{\gamma} : \left[\widetilde{a}, \widetilde{b}\right] \to \mathbb{C}$ se obţine din γ printr-o reparametrizare netedă strict crescătoare $\rho : \left[\widetilde{a}, \widetilde{b}\right] \to [a, b]$, atunci $\widetilde{\gamma}$ se numeşte un drum orientat echivalent cu γ şi notăm acest fapt prin $\widetilde{\gamma} \sim \gamma$.

Comentarii. În condiţiile definiţiei precedente, dacă $\widetilde{\gamma} \sim \gamma$, atunci $\widetilde{\gamma}$ şi γ au aceeaşi mulţime suport, $im(\widetilde{\gamma}) = \Gamma = \mathbf{im}(\gamma)$, şi în raport cu convenţia de orientare în sensul creşterii parametrului, mulţimea Γ este parcursă intuitiv în acelaşi sens din punctul iniţial $\widetilde{\gamma}(\widetilde{a}) = \gamma(a)$ în punctul final $\widetilde{\gamma}\left(\widetilde{b}\right) = \gamma(b)$, relativ la fiecare din cele două drumuri orientate $\widetilde{\gamma}$ şi γ. Un exemplu util este următorul: fie $\widetilde{\gamma} : [0, \pi] \to \mathbb{C}$ cu $\widetilde{\gamma}(\varphi) = \cos\varphi + i\sin\varphi, \forall\varphi \in [0, \pi]$ şi $\gamma : [-1, 1] \to \mathbb{C}$ cu $\gamma(t) = -t + i\sqrt{1 - t^2}, \forall t \in [-1, 1]$; atunci $\widetilde{\gamma} \sim \gamma$, deoarece $\widetilde{\gamma} = \gamma \circ \rho$ pentru reparametrizarea $\rho : [0, \pi] \to [-1, 1]$ cu $\rho(\varphi) = -\cos\varphi, \forall\varphi \in [0, \pi]$. Având în vedere cele menţionate, dacă $\widetilde{\gamma} \sim \gamma$, atunci drumurile $\widetilde{\gamma}$ şi γ se numesc *echivalente cu aceeaşi orientare*.

Propoziţia 7. Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ o mulţime deschisă şi $\gamma : [a, b] \to D$ un drum neted pe porţiuni cu mulţimea suport Γ. Presupunem că $f : D \to \mathbb{C}$ este integrabilă pe γ şi drumul γ are lungimea $l(\gamma)$. Atunci sunt îndeplinite condiţiile următoare:

(i) Dacă $\widetilde{\gamma} : \left[\widetilde{a}, \widetilde{b}\right] \to D$ este un drum în D astfel încât $\widetilde{\gamma} \sim \gamma$, atunci f este o funcţie integrabilă pe $\widetilde{\gamma}$ şi are loc relaţia următoare:

$$\int_{\widetilde{\gamma}} f(z)\, dz = \int_{\gamma} f(z)\, dz.$$

(ii) Funcţia f este integrabilă pe drumul opus $-\gamma$ şi are loc identitatea:

$$\int_{-\gamma} f(z)\, dz = -\int_{\gamma} f(z)\, dz.$$

(iii) Este valabilă următoarea inegalitate:

$$\left|\int_{\gamma} f(z)\, dz\right| \leq l(\gamma) \max\{|f(z)| : z \in \Gamma\}.$$

4.2 Formula lui Cauchy

Formula lui Cauchy este unul din rezultatele principale ale teoriei funcţiilor complexe. Ne referim întâi la acest rezultat pentru domenii simplu conexe. Utilizăm în acest sens următorul rezultat privind studiul existenţei primitivelor.

Teorema 1. Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ un domeniu simplu conex. Dacă $f : D \to \mathbb{C}$ este olomorfă pe D atunci există o funcţie $F : D \to \mathbb{C}$ olomorfă pe D cu proprietatea

$F'(z) = f(z), \forall z \in D$, adică $F' = f$.

De asemenea, are loc următorul rezultat:

Teorema 2. Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ o mulţime deschisă şi $f : D \to \mathbb{C}$. Presupunem că sunt îndeplinite condiţiile următoare:

1) $\gamma : [a, b] \to D$ este un drum parametrizat neted pe porţiuni;

2) $F : D \to \mathbb{C}$ este o primitivă a lui f, adică F este olomorfă pe D astfel încât $F' = f$.

Atunci f este integrabilă pe γ şi are loc relaţia următoare:

$$\int_{\gamma} f(z)\, dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) \text{ (\textit{formula Leibniz-Newton})}$$

Se obţine următorul rezultat ca un corolar al teoremelor precedente.

Teorema 3 (*formula lui Cauchy*). Dacă $D \subseteq \mathbb{C}$ este un domeniu simplu conex, $f : D \to \mathbb{C}$ este o funcţie complexă şi $\gamma : [a, b] \to D$ este un drum parametrizat neted pe porţiuni închis atunci

$$\int_{\gamma} f(z)\, dz = 0.$$

Comentarii. Formula lui Cauchy pentru domenii simplu conexe se poate generaliza la cazul domeniilor multiplu conexe D reprezentând interiorul unor mulţimi compacte bordate multiplu conexe $K \subseteq \mathbb{C}$ (cf. Fig. 22). Se deduce următoarea formulă de calcul:

$$(FC) \quad \int_{\gamma} f(z)\, dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{-\gamma_k} f(z)\, dz,$$

unde γ şi $(\gamma_k)_{k=\overline{1,n}}$ sunt drumuri parametrizate netede pe porţiuni astfel încât să fie îndeplinite condiţiile următoare:

1) frontiera lui K notată $fr(K)$ este orientată pozitiv în raport cu interiorul lui K dat prin $int(K) = D$;

2) $fr(K) = \Gamma \cup \left(\bigcup_{k=1}^{n} \Gamma_k \right)$ cu $\Gamma = im(\gamma)$ şi $\Gamma_k = im(\gamma_k), \forall k \in \{1, 2, ..., n\}$.

În membrul drept al egalităţii (FC),

$-\gamma_k$ este opusul drumului γ_k, $\forall k \in \{1, 2, ..., n\}$.

4.3 Formula integrală a lui Cauchy

Formula integrală a lui Cauchy este un alt rezultat esenţial. Introducem următoarele noţiuni suplimentare necesare privind derivatele de ordin superior ale funcţiilor complexe.

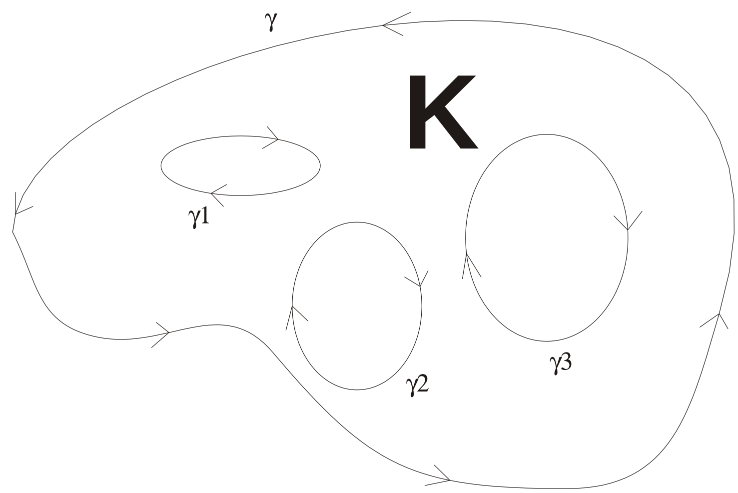

Figure 22: Compact **K** bordat, multiplu conex, cu frontiera pozitiv orientată relativ la $int\,(K)$, $fr\,(K) = im\,(\gamma) \cup [im\,(\gamma 1) \cup im\,(\gamma 2) \cup im\,(\gamma 3)]$

Definiţia 1. Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ o mulţime deschisă, $f : D \to \mathbb{C}$ o funcţie şi $j \in \mathbb{N}$.

(i) Funcţia $f^{(0)} : D \to \mathbb{C}$ există şi este definită prin relaţia:

(1) $f^{(0)}\,(z) = f\,(z)\,, \forall z \in D.$

(ii) Dacă funcţia $f^{(j-1)} : D \to \mathbb{C}$ există şi $f^{(j-1)}$ este $\mathbb{C}$-derivabilă pe D, atunci spunem că funcţia $f^{(j)} : D \to \mathbb{C}$ există şi este definită prin relaţia:

(2) $f^{(j)}\,(z) = \left(f^{(j-1)}\right)'(z), \forall z \in D,$

unde $\left(f^{(j-1)}\right)' : D \to \mathbb{C}$ este derivata funcţiei $f^{(j-1)}$ pe D.

Definiţia 2. Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ mulţime deschisă, $f : D \to \mathbb{C}$ şi $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

(i) Dacă $n = 0$, atunci funcţia f este derivabilă de ordinul 0 pe D cu derivata de ordinul 0 pe D notată $f^{(0)} : D \to \mathbb{C}$ şi definită prin relaţia $f^{(0)} = f$.

(ii) Dacă $n \geq 1$, atunci funcţia f este derivabilă de ordinul n pe D dacă pentru orice $j \in \{1, ..., n\}$, funcţia $f^{(j)} : D \to \mathbb{C}$ există (a se vedea 4.3 Def.1) şi în acest caz funcţia $f^{(j)}$ se numeşte derivata de ordinul j a lui f pe D.

Comentariu. Fie $n \in \mathbb{N}$. Din 4.3 Def. 1 şi Def. 2 rezultă că dacă $f : D \to \mathbb{C}$ este derivabilă de ordinul n pe D, atunci f este derivabilă de ordin j pe D, pentru orice $j \in \{0, 1, ..., n-1\}$ şi familia derivatelor sale $\left(f^{(j)} : D \to \mathbb{C}\right)_{j=\overline{1,n}}$ satisface relaţiile de recurenţă (2) din 4.3 Def. 1.

Teorema 3 (*formula integrală a lui Cauchy*). Fie $f : D \to \mathbb{C}$ olomorfă pe mulţimea deschisă D şi $K \subseteq D$ un compact bordat elementar. Atunci:

(i) f este derivabilă de ordin m pe D, pentru orice $m \geq 2$;

(ii) pentru orice $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ şi $z_0 \in int\,(K) \subseteq D$, are loc formula:

$$f^{(n)}\,(z_0) = \tfrac{n!}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \tfrac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz,$$

unde γ este un drum parametrizat cu mulţimea suport $\Gamma = fr\,(K)$ egală cu frontiera lui K parcursă în sens pozitiv relativ la $int\,(K)$.

Comentarii. Noţiunea de compact bordat elementar $K \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ a fost introdusă în cursul de analiză reală pentru evaluarea integralelor curbilinii de speţa a doua în plan cu formula Green-Riemann

$$\int_\gamma P dx + Q dy = \iint_K \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \right),$$

unde $P, Q \in C^1(D)$.

Rezultatul anterior este în conexiune cu studiul integralei complexe. Formula integrală Cauchy permite stabilirea următorului rezultat important:

Formula lui Taylor. Fie $f \in \mathcal{O}(D)$ cu $D \subseteq \mathbb{C}$ deschisă. Atunci pentru orice punct $z_0 \in D$ există $r \in \mathbb{R}_+^*$ astfel încât $D_r(z_0) \subseteq D$ şi avem

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n, \forall z \in D_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}.$$

Rezultatele anterioare se aplică la studiul punctelor singulare izolate ale funcţiilor complexe bazat pe serii de puteri întregi numite *serii Laurent*. Rezultă *teorema lui Cauchy a reziduurilor cu aplicaţii la calculul unor integrale reale.*

Bibliografie

1. V. Brânzănescu, O. Stănăşilă, Matematici speciale - teorie, exemple, aplicaţii, Ed. All, 1998.

2. P. Flondor, O. Stănăşilă, Lecţii de analiză matematică, Ed. All, 1996.

3. E. Kreyszig, Advanced Engineering Mathematics (9th ed.), John Wiley & Sons, 2006.

4. M. Moroianu, V. Stanciu, Calcul integral şi elemente de analiză complexă, Ed. Printech, 2003.

5. H. A. Priestley, Introduction to Complex Analysis (second edition), Oxford University Press, 2003.

6. I. Rizzoli, Introducere în teoria funcţiilor de o variabilă complexă, Ed. Universităţii Bucureşti, 1999.

7. O. Stănăşilă, Matematici speciale, ecuaţii diferenţiale şi analiză complexă, vol. 2, Ed. All, 2001.